

PROBLEMA SVOLTO 11 Urti tra fotoni ed elettroni

► Effetto Compton ► Conservazione dell'energia totale relativistica

Un fotone di lunghezza d'onda pari a 0,150 nm viene diffuso da un elettrone libero in un blocco metallico. A seguito della collisione con il fotone, l'elettrone acquista un'energia cinetica pari a 200 eV.

- 1 Qual è la lunghezza d'onda del fotone dopo la collisione?
- 2 Quanto vale l'angolo di scattering del fotone diffuso?
- 3 Qual è l'energia massima che l'elettrone può acquistare a seguito di una collisione con il fotone?

SOLUZIONE

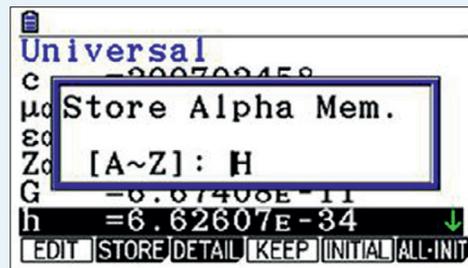
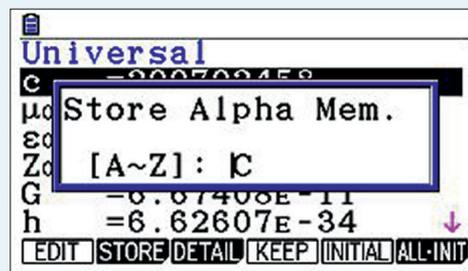
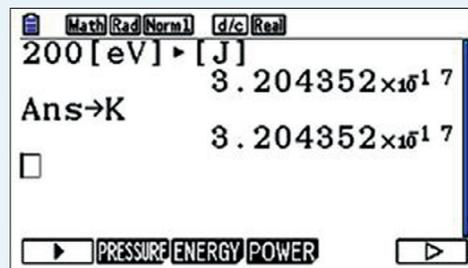
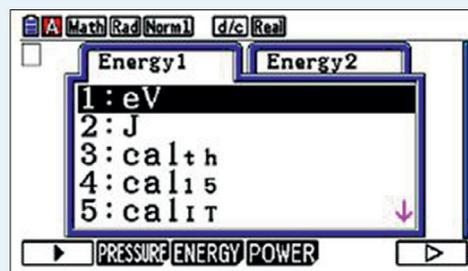
- 1 Innanzitutto, convertiamo in joule l'energia cinetica dell'elettrone:

$$K_{el} = 200 \text{ eV} = 200 \text{ eV} \cdot \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 3,20 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA



- Prima di procedere con i calcoli convertiamo le unità di misura e recuperiamo alcuni valori utili.
- Innanzitutto, convertiamo in joule il lavoro di estrazione: selezioniamo il menu **CALCOLI** seguito da **EXE**. Poi digitiamo il tasto **OPTN** seguito da **F6** (\triangleright) ed **F1** (**CONVERT**).
- Digitiamo ora 200 e selezioniamo **ENERGY** con la sequenza **F6** (\triangleright), **F6** (\triangleright), **F3** (**ENERGY**). Dal menu a tendina selezioniamo gli elettronvolt collocandoci col cursore sulla prima riga 1: eV e digitiamo **EXE**.
- Digitiamo poi **F1** (\triangleright) per procedere con la conversione, seguito nuovamente da **F3** (**ENERGY**). Dal menu a tendina selezioniamo con il cursore 2: J per trasformare gli elettronvolt in joule.
- Digitando **EXE** otteniamo la conversione chiesta e troviamo così: $K = 200 \text{ eV} = 3,20 \cdot 10^{-17} \text{ J}$.
- Memorizziamo questo valore con la lettera K digitando **ALPHA** \triangleright (K) seguito da **EXE**.
- Recuperiamo ora alcuni valori utili. Selezioniamo il menu **PHYSIUM** seguito da **EXE**.
- Con il cursore selezioniamo **COSTANTI FISICHE FONDAMENTALI** seguito da **EXE**. Selezioniamo **UNIVERSALI** seguito da **EXE**. Spostandoci con il cursore selezioniamo la velocità della luce c. Col tasto **F2** possiamo memorizzarne il valore assegnandogli un simbolo. Memorizziamo il suo valore con la lettera C digitando **ALPHA** \triangleright (C) seguito da **EXE**.
- Con procedura analoga memorizziamo il valore della costante di Planck con la lettera H.



Poiché il sistema è isolato l'energia totale si conserva e possiamo scrivere:

$$E_{\text{fotone}} + m_{\text{el},0} \cdot c^2 = E'_{\text{fotone}} + m_{\text{el},0} \cdot c^2 + K_{\text{el}}$$

cioè:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_{\text{el}}$$

da cui:

$$\frac{1}{\lambda'} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{K_{\text{el}}}{hc} \right) = \left(\frac{1}{0,150 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - \frac{3,20 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})} \right) = 6,505799 \text{ nm}^{-1}$$

La lunghezza d'onda del fotone dopo la collisione è:

$$\lambda' = 0,153709 \text{ nm} = 0,154 \text{ nm}$$

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

- Per determinare la lunghezza d'onda del fotone dopo la collisione utilizziamo il menu EQUAZIONI.
- Selezioniamo con il tasto **[MENU]** l'icona EQUAZIONI seguita da **[EXE]**. Con il tasto **[F3]** selezioniamo il risolutore di equazioni.
- Inseriamo l'equazione $\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_{\text{el}}$ nella prima riga. Digitiamo la formula seguita dal tasto **[EXE]**.
- Indichiamo con:
 - L la lunghezza d'onda del fotone diffuso ($L = \lambda = 0,150 \text{ nm} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$)
 - J la lunghezza d'onda del fotone dopo la collisione (da determinare)
- Troveremo inoltre i valori attribuiti in precedenza:
 - K l'energia cinetica del fotone ($K = 3,20 \cdot 10^{-17} \text{ J}$)
 - H la costante di Plank
 - C la velocità della luce

- Collocandoci con il cursore su J , tramite il comando SOLVE (tasto **[F6]**) ricaviamo la lunghezza d'onda del fotone dopo la collisione:

$$\lambda' = 1,537 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 0,154 \text{ nm}$$

2 Ricaviamo l'angolo di scattering θ dalla formula per lo spostamento Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{\text{el},0} \cdot c} (1 - \cos \theta)$$

da cui:

$$\frac{m_{\text{el},0} \cdot c \cdot (\lambda' - \lambda)}{h} = 1 - \cos \theta$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$\cos \theta = 1 - \frac{m_{el,0} \cdot c \cdot (\lambda' - \lambda)}{h}$$

$$\theta = \arccos \left(1 - \frac{m_{el,0} \cdot c \cdot (\lambda' - \lambda)}{h} \right) =$$

$$= \arccos \left[1 - \frac{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})(0,154 \text{ nm} - 0,150 \text{ nm})}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} \right] = 122^\circ$$

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA



Prima di cominciare assicuriamoci che la calcolatrice sia settata con gli angoli misurati in gradi. Altrimenti modifichiamo la scelta tramite SET UP (digitando **SHIFT** **MENU**).

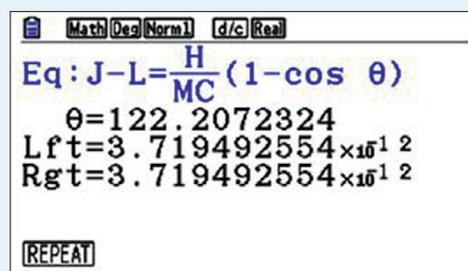
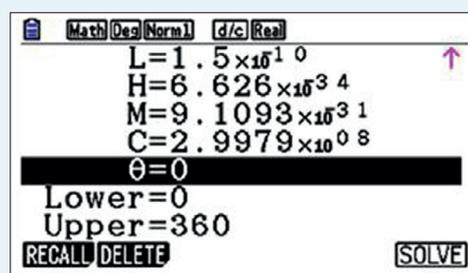
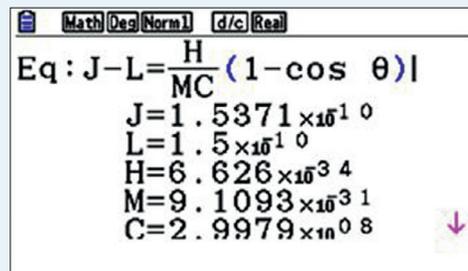
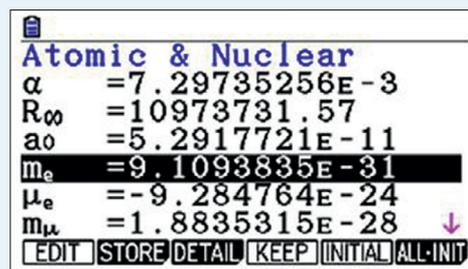
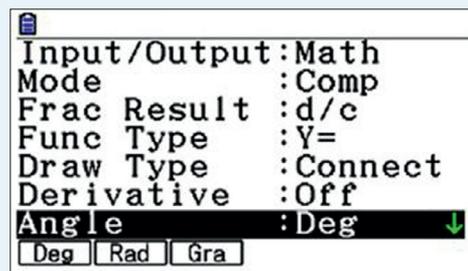
- Selezioniamo il menu PHYSIUM seguito da **EXE**.
- Con il cursore selezioniamo COSTANTI FISICHE FONDAMENTALI seguito da **EXE**. Con il cursore selezioniamo ATOMICHE e NUCLEARI seguito da **EXE** dove memorizziamo con la lettera M la massa dell'elettrone.

- Selezioniamo con il tasto **MENU** l'icona EQUAZIONI seguita da **EXE**. Con il tasto **F3** selezioniamo il risolutore di equazioni.
- Cancelliamo la formula usata nel punto precedente con la sequenza **F2** (DELETE) **F1** (YES).
- Inseriamo ora la nuova equazione seguita dal tasto **EXE**. Troveremo i valori attribuiti in precedenza.

- Per essere sicuri di trovare un angolo compreso tra 0° e 360° possiamo limitare il range di ricerca collocandoci con il cursore su Lower e digitando 0 seguito da **EXE** e poi su Upper, inserendo il valore 360 seguito da **EXE**.

- Collocandoci ora con il cursore su θ , tramite il comando SOLVE (tasto **F6**) determiniamo l'angolo di scattering del fotone diffuso:

$$\theta = 122^\circ$$



- 3** L'elettrone acquista l'energia massima quando l'angolo di scattering è pari a 180° , ossia quando l'elettrone viene diffuso nella direzione opposta a quella di partenza.
Dalla formula dello spostamento Compton abbiamo:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{\text{el},0} \cdot c} (1 - \cos 180^\circ)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_{\text{el},0} \cdot c}$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_{\text{el},0} \cdot c} = 0,150 \text{ nm} + \frac{2 \cdot (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})} = 0,15485 \text{ nm}$$

Applichiamo infine la conservazione dell'energia totale, come già fatto nel punto **2.**:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_{\text{el}, \text{max}}$$

da cui ricaviamo l'energia massima dell'elettrone:

$$\begin{aligned} K_{\text{el}, \text{max}} &= \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = \\ &= (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot \left(\frac{1}{0,150 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{0,15485 \cdot 10^{-9}} \right) = 4,15 \cdot 10^{-17} \text{ J} \end{aligned}$$

PROVA TU Con riferimento al problema svolto, considera un urto tra il fotone di lunghezza d'onda pari a $0,150 \text{ nm}$ e l'elettrone con un angolo di scattering di $45,0^\circ$.

1. Quanto vale la variazione relativa della lunghezza d'onda del fotone dopo la collisione? [0,474%]
2. Quale energia cinetica in eV acquista l'elettrone per effetto Compton? [39,1 eV]
3. Quale dovrebbe essere l'angolo di scattering affinché l'elettrone acquisti un'energia di 300 eV ? [non esiste]