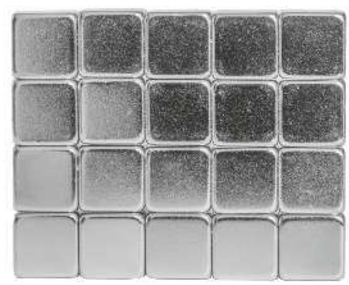
PROBLEMA 19
Una molla magnetica

CONOSCENZE

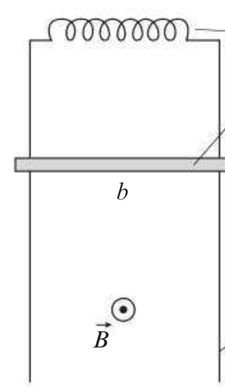
- Secondo principio della dinamica
- Interazioni tra correnti e campo magnetico: forza di Lorentz, legge di Faraday-Neumann-Lenz
- Secondo principio di Kirchhoff
- Calcolo di derivate
- Funzioni goniometriche

ABILITÀ

- Creare semplici modelli matematici
- Applicare il secondo principio e riconoscerlo come equazione differenziale
- Studiare una funzione goniometrica e riconoscervi la descrizione matematica di un'oscillazione
- Riconoscere la soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti



Maria ha acquistato in rete alcuni magneti al neodimio, un metallo del gruppo delle terre rare con forti proprietà magnetiche. Usando del robusto nastro biadesivo, riesce ad attaccare questi magneti alla parete. I magneti sono pertanto in posizione verticale e producono un campo magnetico perpendicolare alla parete. Maria presuppone che questo campo sia uniforme.
Davanti ai magneti, Maria appende due guide metalliche verticali chiuse dall'alto con un induttore. Lungo le guide inserisce, attraverso degli anellini, una sbarretta metallica orizzontale. La sbarretta è collegata elettricamente al resto del circuito, in modo che si formi una maglia elettrica, e può scendere sotto l'azione del suo peso.



Questo dispositivo è collocato in modo che il campo magnetico orizzontale sia ortogonale alla maglia, come schematizzato in figura. Quando Maria lascia andare la sbarretta mobile, osserva un moto oscillatorio, come se la sbarretta penzolasse su e giù da una molla. Nonostante conosca il fenomeno dell'induzione magnetica, la ragazza è un po' sorpresa e vorrebbe capire bene che cosa sta succedendo.
Per aiutare Maria:

1. scrivi l'equazione del moto della sbarretta applicando il secondo principio di Newton. Assumi che siano trascurabili la resistenza elettrica dei conduttori, la resistenza viscosa dell'aria, l'attrito tra la sbarretta e i conduttori verticali e l'autoinduzione del circuito, diversa da quella nell'induttore, che consideriamo ideale;
2. chiama y la quota della sbarretta misurata rispetto a un asse verticale rivolto verso il basso con origine alla quota dell'induttore e scrivi il flusso di $\vec{B}$ come funzione di y;
3. dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz ricava la forza elettromotrice indotta;
4. applica a questa situazione la legge di Kirchhoff sulle maglie;

5. verifica che l'equazione del moto scritta in **1.** si può esprimere come:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - ibB$$

Ricava da qui un'espressione per la derivata seconda della velocità della sbarretta;

6. utilizzando l'equazione ottenuta al punto **4.** scrivi la relazione tra $\frac{d^2v}{dt^2}$ e v.

Il moto oscillatorio osservato da Maria deriva proprio dall'equazione differenziale scritta ora. Infatti, in quest'equazione leggiamo che la derivata seconda della velocità $v(t)$ è proporzionale a $-v(t)$.

7. Poni $\omega^2 = \frac{B^2b^2}{mL}$ e, dopo aver controllato che ω ha le dimensioni del reciproco di un tempo, verifica che $v(t) = \frac{g}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)$ è una soluzione dell'equazione scritta in **6.** Questa soluzione soddisfa le condizioni iniziali $v(0) = 0$ e $v'(0) = g$?

Ora che hai ricavato la funzione che dà la velocità della sbarretta nel tempo, puoi descrivere in modo esauriente come varia la posizione y della sbarretta, riuscendo a spiegare il moto oscillatorio.

8. Integrando l'espressione di $v(t)$ rispetto al tempo, ricava la funzione $y(t)$ con la condizione $y(0) = 0$ e tracciane un grafico qualitativo.
9. Che significato ha il numero $\frac{g}{\omega^2}$?

I magneti comperati da Maria producono un campo magnetico di 0,3 T; la sbarretta è lunga $b = 0{,}2$ m e ha massa $m = 0{,}05$ kg. La ragazza misura il periodo di un'oscillazione completa della sbarretta, che è $T = 6$ s.

10. Con questi dati, è possibile che Maria riesca a ricavare la grandezza, espressa in henry (H), del coefficiente di autoinduzione L?

Svolgimento

1. Sulla sbarretta mobile agiscono la forza peso e la forza di Lorentz $\vec{F}_L = \vec{i}l \wedge \vec{B}$. La forza di Lorentz si genera a causa della corrente indotta, che, quando la sbarretta sta scendendo, circola in senso orario nella maglia disegnata in figura. La forza di Lorentz è quindi verticale e rivolta verso l'alto. Pertanto, se chiamiamo a l'accelerazione della sbarretta e b la sua lunghezza, il secondo principio si può scrivere come:

$$ma = mg - ibB$$

2. Se y indica la quota della sbarretta in un riferimento verticale diretto verso il basso avente origine nella posizione iniziale della sbarretta, l'area della maglia attraversata perpendicolarmente dal campo magnetico è $A = by$ e quindi $\Phi_B = BA = Bby$.

3. La legge di Faraday-Neumann-Lenz dice che $f.e.m. = -\frac{d\Phi_B}{dt}$.

Per quanto visto nel punto **2.**, poiché B e b sono costanti, si ha:

$$f.e.m. = -Bb\frac{dy}{dt}$$

4. Uguagliando a zero la somma delle differenze di potenziale lungo la maglia e ricordando che in un solenoide si ha un fenomeno di autoinduzione in cui la forza elettromotrice è proporzionale alla derivata della corrente circolante, otteniamo:

$$0 = f.e.m. + L\frac{di}{dt} = -Bb\frac{dy}{dt} + L\frac{di}{dt}$$

dove abbiamo indicato con L il coefficiente di autoinduzione. Da qui:

$$Bb\frac{dy}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

5. Nel moto della sbarretta, $y(t)$ è la quota nel riferimento fissato; pertanto $\frac{dy}{dt} = v(t)$ è la velocità (considerata positiva nello scendere) e $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}v = a$ è l'accelerazione.

Il secondo principio della dinamica scritto nel punto **1.** assume dunque la forma:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - ibB$$

Derivando entrambi i membri rispetto al tempo, otteniamo:

$$m\frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{di}{dt}bB \qquad (1)$$

6. Dall'equazione scritta in **4.** Possiamo ricavare che:

$$\frac{Bb}{L}\frac{dy}{dt} = \frac{di}{dt}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (1) ricavata al punto precedente, troviamo la seguente relazione per la funzione $v = v(t)$:

$$m\frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{Bb}{L}\frac{dy}{dt}bB$$

cioè:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{B^2 b^2}{mL}v$$

7. L'unità di misura dell'induttanza L è $\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A}}$ e quella dell'intensità del campo magnetico B è $\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}}$.

Poiché abbiamo definito $\omega^2 = \frac{B^2 b^2}{mL}$, le unità di misura di ω^2 sono:

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}}\right)^2 \cdot \mathrm{m^2}}{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A}}} = \frac{\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}} \cdot \mathrm{A}}{\mathrm{kg}}$$

Se ora ricordiamo che $\mathrm{V \cdot s} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{A}}$, dalla relazione precedente ricaviamo che l'unità di misura di ω^2 è $\frac{1}{\mathrm{s^2}}$. Abbiamo quindi dimostrato che ω ha le dimensioni del reciproco di un tempo.

Osserviamo in primo luogo che, se $v(t) = \frac{g}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$, allora $v(0) = 0$. Essendo poi $\frac{d}{dt}v(t) = g\cos(\omega t)$, si ha anche $v'(0) = g$.

Calcolando la derivata seconda della funzione $v(t)$ si ottiene:

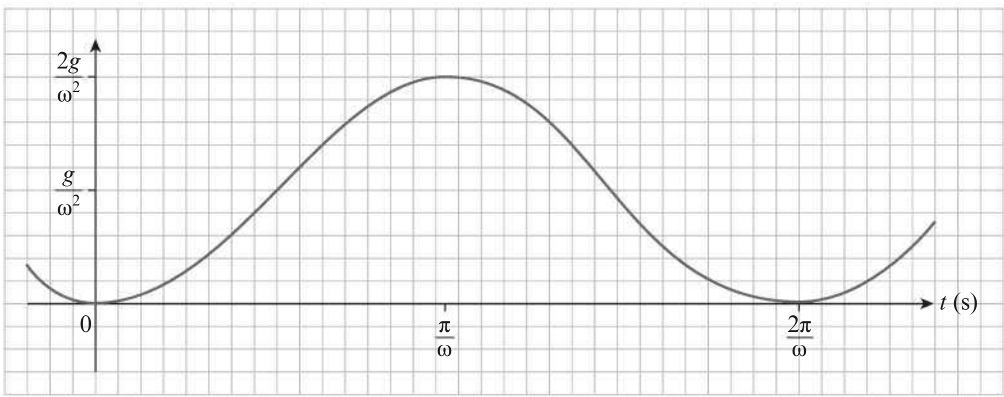
$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) = -g\omega \operatorname{sen}(\omega t) = -\omega^2 v(t)$$

Quindi la funzione $v(t)$ scelta è una soluzione al nostro problema che soddisfa i dati iniziali.

8. La funzione $y(t)$ che descrive la posizione della sbarretta nel tempo si ricava integrando la funzione $v(t)$ rispetto al tempo:

$$y(t) = \int_0^t \frac{g}{\omega}\operatorname{sen}(\omega\tau)d\tau = \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

Nello svolgere questo integrale abbiamo usato la condizione iniziale $y(0) = 0$.
Il grafico della funzione $y(t)$ è il seguente.



9. Il valore $\frac{g}{\omega^2}$, che ha le dimensioni di una lunghezza, rappresenta la posizione intorno alla quale la sbarretta compie oscillazioni sinusoidali con ampiezza $\frac{g}{\omega^2}$.

10. Il periodo del moto oscillatorio è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Nel caso in esame, $\omega^2 = \frac{B^2 b^2}{mL} = \frac{7{,}2 \cdot 10^{-2}}{L}$ da cui $\omega \cong \frac{2{,}7 \cdot 10^{-1}}{\sqrt{L}}$.

Utilizzando la misura del periodo, otteniamo:

$$\frac{2\pi}{\frac{2{,}7 \cdot 10^{-1}}{\sqrt{L}}} = 6$$

da cui:

$$\sqrt{L} \cong 0{,}26$$

e quindi:

$$L \cong 6{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{H}$$