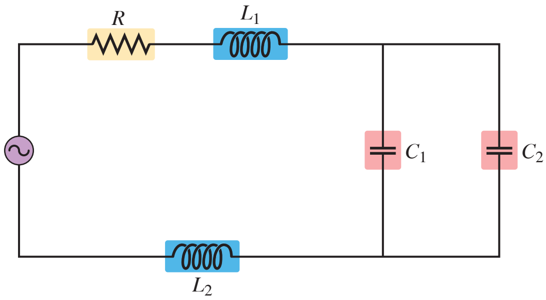
PROBLEMA SVOLTO 5 Un circuito *RLC* in corrente alternata

▶ Circuiti in AC ▶ Circuito *RLC* serie ▶ Condensatori e induttanze equivalenti

Nel circuito in **figura**, alimentato da un generatore con frequenza di oscillazione regolabile, si conoscono $L_1 = 4{,}00$ mH e $C_1 = 3{,}00$ μF, mentre non sono noti i valori di R, L_2 e C_2.
Quando la frequenza del generatore è 3000 Hz, l'impedenza del circuito è 251 Ω e l'angolo di fase è 45,0°.



1 Dimostra che il valore di R deve necessariamente essere 178 Ω, quindi stabilisci se il circuito è di natura prevalentemente capacitiva o induttiva.

Si varia gradualmente la frequenza del generatore e si osserva che quando essa è 712 Hz la potenza media dell'energia dissipata è massima.

2 Utilizzando questa informazione e sapendo che in un circuito l'induttanza totale è data dalla somma delle singole induttanze, ricava i valori di L_2 e C_2 e verifica che sono, rispettivamente, 6,0 mH e 2,00 μF.

Si riporta nuovamente la frequenza del generatore al valore 3000 Hz e si imposta l'ampiezza della tensione del generatore a 50,0 V.

3 Quanto vale ora la potenza media dell'energia dissipata e qual è l'espressione della corrente che attraversa il generatore in funzione del tempo? La corrente è in anticipo o è in ritardo rispetto alla tensione del generatore?

SOLUZIONE

1 L'angolo di fase Φ è dato da:

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Essendo $\phi = 45°$, per cui $\mathrm{tg}\,\phi = \mathrm{tg}\,45° = 1$, otteniamo:

$$\frac{X_L - X_C}{R} = 1$$

e quindi:

$$X_L - X_C = R$$

cioè la reattanza totale del circuito risulta uguale alla resistenza.
L'impedenza è data da:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}\,R$$

quindi:

$$R = \frac{Z}{\sqrt{2}} = \frac{251\ \Omega}{\sqrt{2}} = 178\ \Omega$$

Inoltre, poiché $X_L - X_C = R > 0$, allora $X_L > X_C$, per cui si può concludere che la natura del circuito è prevalentemente induttiva.

2 Se alla frequenza di 712 Hz la potenza media dell'energia dissipata è massima, allora tale frequenza è proprio la frequenza di risonanza. Utilizziamo questa informazione e mettiamola a sistema con quanto trovato nel punto precedente, cioè che $X_L - X_C = R$:

$$\begin{cases} f_{\text{ris}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ X_L - X_C = R \end{cases}$$

$$\begin{cases} LC = \dfrac{1}{4\pi^2 f_{\text{ris}}^2} \\ 2\pi f_G L - \dfrac{1}{2\pi f_G C} = R \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $C = \dfrac{1}{4\pi^2 f_{\text{ris}}^2 L}$, che, sostituito nella seconda, dà:

$$2\pi f_G L - \dfrac{1}{2\pi f_G \dfrac{1}{4\pi^2 f_{\text{ris}}^2 L}} = R$$

Svolgiamo i calcoli:

$$2\pi f_G L - \dfrac{2\pi f_{\text{ris}}^2 L}{f_G} = R$$

$$2\pi L\left(f_G^2 - f_{\text{ris}}^2\right) = f_G R$$

Ricaviamo L e calcoliamo il valore:

$$L = \dfrac{f_G R}{2\pi\left(f_G^2 - f_{\text{ris}}^2\right)} = \dfrac{(3000\ \text{Hz})(178\ \Omega)}{2\pi\left(3000^2\ \text{Hz}^2 - 712^2\ \text{Hz}^2\right)} = 0{,}0100\ \text{H} = 10{,}0\ \text{mH}$$

Pertanto, la capacità risulta:

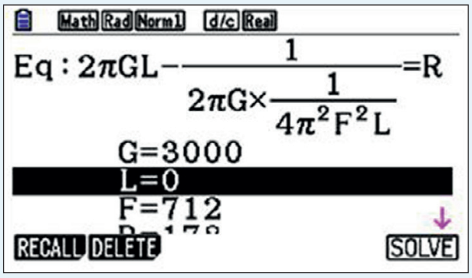
$$C = \dfrac{1}{4\pi^2 f_{\text{ris}}^2 L} = \dfrac{1}{4\pi^2 (712^2\ \text{Hz}^2)(0{,}0100\ \text{H})} = 5{,}00 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 5{,}00\ \mu\text{F}$$

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

- Selezioniamo con il tasto MENU l'icona EQUAZIONI seguita da EXE.
- Con il tasto F3 selezioniamo il risolutore di equazioni.
- Introduciamo la formula:

$$2\pi f_G L - \dfrac{1}{2\pi f_G \dfrac{1}{4\pi^2 f_{\text{ris}}^2 L}} = R$$

seguita da EXE.



- Inseriamo i valori noti attribuiti alle variabili che compaiono nell'equazione seguiti dal tasto EXE. Indichiamo con:

  G = 3000 Hz la frequenza del generatore;

  R = 178 Ω la resistenza;

  F = 712 Hz la frequenza di risonanza.

- Collocandoci poi con il cursore sul valore L, tramite il comando SOLVE (tasto F6), ricaviamo il valore dell'impedenza: L = 0,010 H = 10,0 mH.