

# Operazioni e problemi con le frazioni

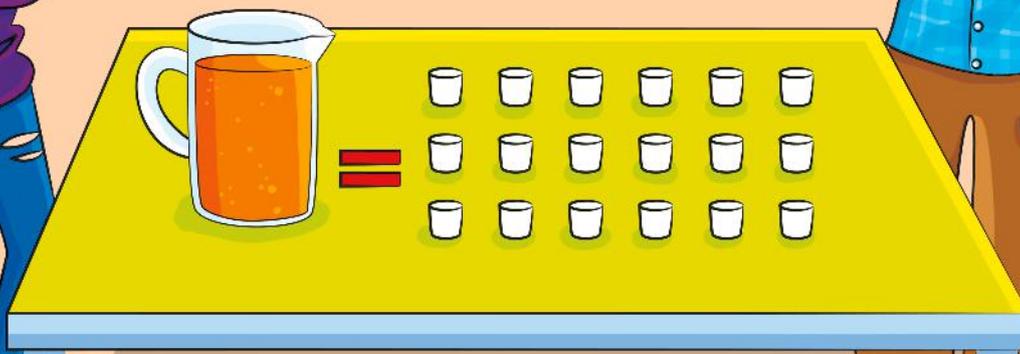
CON UN BICCHIERE PICCOLO RIEMPI  $\frac{1}{3}$  DI BICCHIERE.

$$\text{bicchiere piccolo} = \text{bicchiere grande} \cdot \frac{1}{3}$$

CON UNA BROCCA QUANTI BICCHIERI PICCOLI SI POSSONO RIEMPIRE?

CON UN BICCHIERE GRANDE RIEMPI  $\frac{1}{5}$  DI BROCCA.

$$\text{bicchiere grande} = \text{brocca} \cdot \frac{1}{5}$$



COLORA TUTTI I BICCHIERI CHE SI POSSONO RIEMPIRE.

PUOI TROVARE LA RISPOSTA IN FONDO AL VOLUME.

## LEZIONI

1. L'addizione e la sottrazione di frazioni
2. La moltiplicazione di frazioni
3. La divisione di frazioni
4. La potenza di una frazione
5. Le espressioni contenenti frazioni
6. Problemi fondamentali sulle frazioni
7. Altri problemi sulle frazioni

## IMPARAFACILE

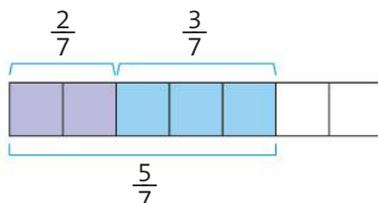
- Ripasso e recupero



# L'addizione e la sottrazione di frazioni

## Frazioni con lo stesso denominatore

Vogliamo calcolare quanto fa  $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ . Disegniamo il modello dell'addizione su una striscia.



Dal modello risulta evidente che se uniamo i 2 settimi con i 3 settimi di una quantità otteniamo i  $2 + 3 = 5$  settimi della quantità stessa.



### CONCETTO CHIAVE

### Addizione e sottrazione di frazioni con lo stesso denominatore

Per **aggiungere** (o **sottrarre**) due frazioni che hanno lo **stesso denominatore**, si scrive una frazione che ha:

- come denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date;
- come numeratore la somma (o la differenza) dei numeratori.

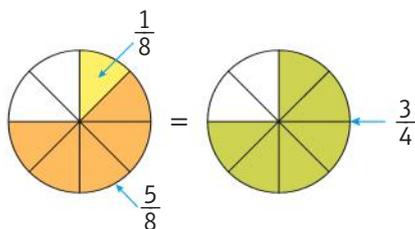
Il risultato si riduce ai minimi termini, se è possibile.

### ESERCIZI GUIDA

**1 Modelli** Disegna un modello di ciascuna operazione.

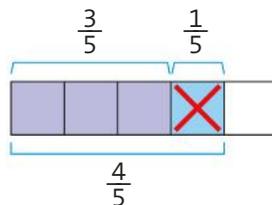
a.  $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Usa il cerchio.



b.  $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Usa la striscia.



**2 Calcoli** Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni.

a.  $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$

b.  $\frac{9}{13} - \frac{5}{13} = \frac{9-5}{13} = \frac{4}{13}$

c.  $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1+2+4}{9} = \frac{7}{9}$

d.  $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1+3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

e.  $\frac{53}{50} - \frac{23}{50} = \frac{53-23}{50} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

f.  $\frac{12}{5} - \frac{9}{5} + \frac{3}{5} = \frac{12-9+3}{5} = \frac{6}{5}$

Per abbreviare la scrittura, possiamo tracciare una linea di frazione lunga e scrivere una volta sola il denominatore:

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7}$$



## Frazioni con denominatori diversi

Vogliamo calcolare quanto fa  $\frac{5}{6} + \frac{1}{4}$ .

Per ottenere la soluzione dobbiamo, prima di tutto, portare le due frazioni allo stesso denominatore. Calcoliamo il **minimo comune multiplo** di 6 e 4:

mcm (6, 4) = 12.

Poi riduciamo le frazioni allo stesso denominatore e calcoliamo la somma:

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{4} = \frac{10}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$$

Una volta trovato il mcm (in questo caso 12), si calcolano a mente i due numeratori:  
 $12 : 6 \cdot 5 = 10$   
 $12 : 4 \cdot 1 = 3$



### CONCETTO CHIAVE

### Addizione e sottrazione di frazioni con denominatori diversi

Per **addizionare** (o **sottrarre**) due frazioni che hanno **denominatori diversi** si procede così:

- si **riducono le frazioni allo stesso denominatore**;
- si **addizionano** (o si **sottraggono**) le frazioni ottenute.

Il risultato si riduce ai minimi termini, se è possibile.

Se vogliamo **abbreviare la scrittura**, possiamo tracciare una linea di frazione lunga e scrivere una sola volta il denominatore comune. Per esempio:

sottrazione dei numeratori

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{8-5}{10} = \frac{3}{10}$$

denominatore comune

addizione dei numeratori

$$\frac{1}{6} + \frac{4}{9} = \frac{3+8}{18} = \frac{11}{18}$$

denominatore comune

### ESERCIZI GUIDA CON VIDEO TUTORIAL



**3 Due frazioni** Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni.

a.  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3^1}{6_2} = \frac{1}{2}$

b.  $\frac{5}{6} - \frac{2}{9} = \frac{15-4}{18} = \frac{11}{18}$

**4 Con numeri interi** Calcola.

a.  $2 - \frac{3}{8} = \frac{2}{1} - \frac{3}{8} = \frac{16-3}{8} = \frac{13}{8}$

b.  $\frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{5}{1} = \frac{3+20}{4} = \frac{23}{4}$

Un numero intero si può sempre trasformare in una frazione con denominatore uguale a 1.

**5 Tre frazioni** Calcola.

a.  $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{15-12+8}{30} = \frac{11}{30}$   
 mcm(2, 5, 15) = 30

b.  $\frac{8}{3} - 2 - \frac{2}{7} = \frac{56-42-6}{21} = \frac{8}{21}$   
 mcm(3, 1, 7) = 21

Se le frazioni da addizionare (o sottrarre) sono più di due, dobbiamo calcolare il minimo comune multiplo dei denominatori di tutte le frazioni.

**6 Con riduzione** Calcola.

$$\frac{8^2}{12_3} + \frac{6^3}{14_7} = \frac{2}{3} + \frac{3}{7} = \frac{14+9}{21} = \frac{23}{21}$$

Quando possibile, è sempre meglio ridurre ai minimi termini le frazioni **prima** di addizionarle o sottrarle.



**ESERCIZI DELLA LEZIONE 1**

**CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE**

**1 Stesso denominatore** Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni. Spiega oralmente il procedimento. **ESECIZIO GUIDA 2**

a.  $\frac{13}{8} + \frac{7}{8} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

b.  $\frac{14}{5} - \frac{4}{5} = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

c.  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

**2 Denominatori diversi** Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni. Spiega oralmente il procedimento. **ESECIZIO GUIDA 3**

a.  $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

b.  $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

c.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{7} - \frac{5}{14} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

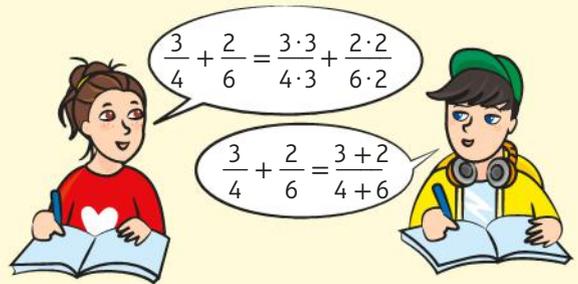
**3 Numeri interi** Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni di frazioni e numeri interi. Spiega oralmente il procedimento. **ESECIZIO GUIDA 4**

a.  $2 + \frac{1}{5} = \dots = \dots$

b.  $1 - \frac{3}{4} = \dots = \dots$

c.  $\frac{23}{10} - 2 = \dots = \dots$

**4 Chi ha ragione?** Giulia e Mario devono calcolare  $\frac{3}{4} + \frac{2}{6}$ . Chi dei due ha seguito la procedura corretta? Spiega perché.



**APPLICARE STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI**

**5 Con due frazioni** Calcola le seguenti addizioni e sottrazioni e riduci il risultato ai minimi termini. **ESECIZIO GUIDA 6**

$\frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$

$\frac{11}{6} - \frac{7}{24} = \frac{37}{24}$

$\frac{11}{10} - \frac{5}{6} = \frac{4}{15}$

$3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{13}{24}$

$\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{1}{24}$

$\frac{11}{45} - \frac{1}{30} = \frac{19}{90}$

$\frac{7}{6} + 2 = \frac{19}{6}$

**6 Con tre frazioni** Calcola le seguenti addizioni e sottrazioni. **ESECIZIO GUIDA 5**

$\frac{1}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4} = \frac{41}{12}$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = 2$

$\frac{4}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

$\frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{7}{2}$

$\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{8}{5} = \frac{73}{30}$

$\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{13}{12} = \frac{13}{12}$

$\frac{11}{6} - \frac{13}{9} - \frac{7}{18} = 0$

$\frac{7}{5} + 2 - \frac{1}{15} = \frac{10}{3}$

**7 Con quattro frazioni** Calcola le seguenti addizioni e sottrazioni.

$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{11}{6} = \frac{11}{4}$

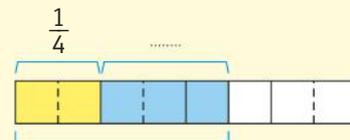
$\frac{3}{2} + \frac{7}{4} - \frac{13}{8} - \frac{9}{16} = \frac{17}{16}$

$\frac{4}{3} + 1 + 5 - \frac{7}{12} = \frac{27}{4}$

$\frac{3}{2} + \frac{5}{3} - \frac{7}{9} - \frac{7}{18} = 2$

**RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI**

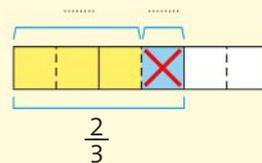
**8 Modello di addizione** Usa il modello a lato per spiegare quanto fa  $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$ . Completa il modello scrivendo le frazioni che mancano.



- 9 **Modello di sottrazione** Usa il modello a lato per spiegare quanto fa  $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ .

Completa il modello scrivendo le frazioni che mancano.

**ESERCIZIO GUIDA 1**



- 10 **A mente** Indica con una crocetta quale delle seguenti operazioni ha come risultato una frazione propria. Risolvi l'esercizio facendo i calcoli a mente.

a.   $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

b.   $1 + \frac{1}{10}$

c.   $2 - \frac{4}{3}$

d.   $\frac{20}{11} - \frac{9}{11}$

- 11 **Numeri e variabili**

a. Calcola quanto vale  $a + b$  sapendo che:  $a = \frac{5}{6}$ ,  $b = \frac{1}{12}$ .

$\left[ \frac{11}{12} \right]$

b. Calcola quanto vale  $a - b$  sapendo che:  $a = \frac{9}{5}$ ,  $b = \frac{1}{15}$ .

$\left[ \frac{26}{15} \right]$

c. Calcola quanto vale  $\frac{5}{12} + x$  sapendo che:  $x = \frac{7}{9}$ .

$\left[ \frac{43}{36} \right]$

- 12 **Incognite** Scrivi nelle caselle i numeri mancanti.

$\frac{\quad}{13} + \frac{6}{13} = \frac{10}{13}$

$\frac{3}{4} + \frac{\quad}{6} = \frac{11}{\quad}$

$\frac{\quad}{4} - \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

$\frac{3}{5} + \frac{3}{\quad} = \frac{9}{10}$

$\frac{\quad}{7} + \frac{5}{14} = \frac{13}{14}$

$\frac{\quad}{3} - \frac{16}{3} = 2$

$\frac{\quad}{3} + \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$

$\frac{\quad}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{\quad}$

$\frac{7}{4} - \frac{\quad}{10} = \frac{9}{\quad}$

$\frac{\quad}{18} + \frac{5}{18} = 1$

$3 - \frac{\quad}{7} = \frac{18}{7}$

$\frac{12}{5} - \frac{\quad}{5} = \frac{2}{5}$

- 13 **MONDO REALE** **Recinto** Aldo e Baldo hanno l'incarico di dipingere un recinto di legno. Aldo ha pitturato la metà del recinto e Baldo ne ha pitturato  $\frac{13}{30}$ . Quale frazione del recinto devono ancora dipingere per terminare il lavoro?

$\left[ \frac{1}{15} \right]$



- 14 **SFIDA** **Somma di unità frazionarie** Come sai, le frazioni del tipo  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{1}{3}$  si chiamano unità frazionarie. Trova un metodo per calcolare mentalmente e velocemente la **somma di due unità frazionarie**.

Comincia con questi casi:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{\dots}{\dots}$

Spiega il metodo che hai usato completando l'enunciato seguente.

La somma di due unità frazionarie è una frazione che ha per denominatore .....  
dei denominatori delle unità frazionarie e per numeratore .....

Applica poi il tuo metodo ai seguenti casi.

$\frac{1}{11} + \frac{1}{7} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{1}{25} + \frac{1}{3} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{1}{99} + \frac{1}{100} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\dots}{\dots}$

# La moltiplicazione di frazioni

Moltiplicare fra loro due frazioni è davvero facile! Basta moltiplicare separatamente i numeratori e i denominatori.

Per esempio:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

Per capire il significato di questa operazione risolviamo un problema.

## ESERCIZIO GUIDA

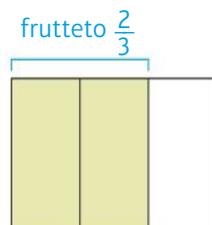
**1 Coltivazione** I  $\frac{2}{3}$  della superficie di un terreno agricolo sono coltivati a frutteto.

I  $\frac{4}{5}$  del frutteto sono occupati da una piantagione di mele.

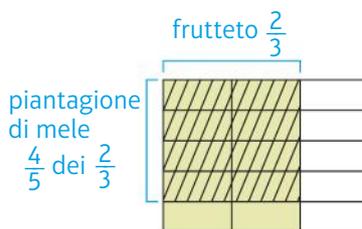
Quale frazione dell'intero terreno è occupata dalla piantagione di mele?

**Primo metodo: usiamo un modello.**

- 1) Disegniamo un rettangolo che rappresenta il terreno, dividiamolo in 3 parti uguali e coloriamo la frazione che rappresenta il frutteto.



- 2) Poi dividiamo ciascuna delle 3 parti in 5 parti uguali. La parte tratteggiata rappresenta la piantagione di mele.



Dal modello risulta che l'intera superficie del terreno agricolo è divisa in 15 parti di cui 8 sono occupate dalla piantagione di mele.

Quindi la piantagione di mele occupa gli  $\frac{8}{15}$  dell'intero terreno.

**Secondo metodo: moltiplichiamo le frazioni.**

Lo stesso risultato si ottiene più semplicemente moltiplicando le due frazioni fra di loro, come mostrato all'inizio.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

Per risolvere il problema abbiamo

calcolato quanto sono i  $\frac{4}{5}$  dei  $\frac{2}{3}$  dell'unità,

cioè **una frazione di una frazione**.

In matematica, le espressioni del tipo:

$$\frac{4}{5} \text{ di } \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

sono equivalenti.

Una **frazione di frazione** si calcola moltiplicando le due frazioni fra loro.




**CONCETTO  
 CHIAVE**
**Moltiplicazione di due o più frazioni**

Per **moltiplicare** due frazioni si procede così:

- 1) si moltiplicano i numeratori fra loro;
- 2) si moltiplicano i denominatori fra loro;
- 3) il risultato si riduce ai minimi termini, se è possibile.

La regola si estende al prodotto di tre o più frazioni.

**ESERCIZIO GUIDA**

**2 Calcoli** Calcola i seguenti prodotti.

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{20}{21} \quad \frac{10}{21} \cdot \frac{7}{5} = \frac{\cancel{70}^{14}}{\cancel{105}_{21}} = \frac{\cancel{14}^2}{\cancel{21}_3} = \frac{2}{3} \quad \frac{6}{13} \cdot 5 = \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{1} = \frac{30}{13}$$

$$5 \cdot \frac{4}{25} = \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{25} = \frac{\cancel{20}^4}{\cancel{25}_5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{15}{56}$$



Se le frazioni sono più di due, devi moltiplicare **tutti** i numeratori fra loro e **tutti** i denominatori fra loro.

## Semplificare in verticale e in diagonale

Per rendere i calcoli **più facili**, possiamo **semplificare** le frazioni, cioè eliminare i divisori comuni ai numeratori e ai denominatori **prima** di eseguire la moltiplicazione.

Osserviamo se un numeratore e un denominatore delle frazioni hanno un **divisore comune** e dividiamo per questo. Ripetiamo l'operazione fino a quando tutti i divisori comuni sono stati eliminati. Possiamo semplificare in verticale (riducendo ai minimi termini), in diagonale o in croce, come mostrato nell'esempio.

**ESEMPIO**

**Semplificazione  
 in verticale**

$$\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{4}{\cancel{20}}} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 3} = \frac{35}{12}$$

Abbiamo diviso per 5

**Semplificazione  
 in diagonale**

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{2} \cdot \frac{1}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

Abbiamo diviso per 3

**Semplificazione  
 in croce**

$$\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{28}{15}$$

Abbiamo diviso per 2 e per 3

**ESERCIZI GUIDA CON VIDEO TUTORIAL**


**3 Calcoli** Calcola i seguenti prodotti, semplificando dove possibile.

a.  $\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{5} \cdot \frac{9}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{27}{10}$

b.  $\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$

c.  $\frac{\overset{2}{\cancel{22}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{11}}} \cdot \frac{7}{\underset{5}{\cancel{20}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{13} = \frac{56}{65}$

**4 Frazione di frazione... di frazione** Calcola  $\frac{1}{2}$  di  $\frac{3}{4}$  di  $\frac{4}{5}$ .

Se le frazioni sono più di due, si procede come nel caso di due frazioni, cioè si moltiplicano fra loro le frazioni:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{5} = \frac{3}{10}$$

**ESERCIZI DELLA LEZIONE 2**

**CONOSCERE** CONCETTI E PROCEDURE

**1 Senza semplificazioni** Esegui le seguenti moltiplicazioni. Spiega oralmente il procedimento che segui. **ESERCIZIO GUIDA 2**

a.  $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

b.  $\frac{3}{5} \cdot 8 = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

c.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{11}{5} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

**2 Con semplificazioni** Esegui le seguenti moltiplicazioni. Applica tutte le semplificazioni possibili prima di calcolare il prodotto. **ESERCIZIO GUIDA 3**

a.  $\frac{9}{11} \cdot \frac{55}{6} = \dots$

c.  $\frac{4}{35} \cdot 14 = \dots$

b.  $\frac{9}{15} \cdot \frac{3}{4} = \dots$

d.  $\frac{25}{4} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{9}{20} = \dots$

**3 Frazione di frazione** Quanti grammi sono  $\frac{1}{2}$  dei  $\frac{3}{4}$  di un kilogrammo? Completa la risoluzione.

$\frac{1}{2}$  dei  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{1}{2}$  dei  $\frac{3}{4}$  di 1 kg =  $\dots \cdot 1 \text{ kg} = \dots \text{ g}$

**APPLICARE** STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI

**4 Senza semplificazioni** Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni.

$\frac{7}{8} \cdot \frac{11}{2}$

$\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{11}{7} \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{7}{5} \cdot \frac{6}{5}$

**5 Semplificazioni in diagonale** Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni.

$\frac{8}{7} \cdot \frac{3}{2}$

$\frac{37}{13} \cdot \frac{26}{23}$

$\frac{18}{25} \cdot \frac{7}{9}$

$\frac{5}{28} \cdot \frac{42}{23}$

$\frac{7}{4} \cdot \frac{10}{17}$

$\frac{17}{15} \cdot \frac{30}{11}$

$\frac{9}{8} \cdot \frac{44}{31}$

$\frac{36}{35} \cdot \frac{56}{27}$

**6 Semplificazioni in diagonale e in verticale** Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni.

$\frac{20}{21} \cdot \frac{49}{24}$

$\frac{19}{24} \cdot \frac{42}{19}$

$\frac{33}{27} \cdot \frac{45}{16}$

$\frac{7}{9} \cdot \frac{12}{9}$

$\frac{26}{9} \cdot \frac{27}{20}$

$\frac{23}{28} \cdot \frac{42}{23}$

$\frac{22}{14} \cdot \frac{49}{7}$

$\frac{16}{15} \cdot \frac{18}{20}$

**7 Con tre o più frazioni** Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni.

$\frac{21}{10} \cdot \frac{15}{44} \cdot \frac{22}{35}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{18}{25} \cdot 8 \cdot \frac{10}{36}$

$\frac{2}{13} \cdot 5 \cdot \frac{7}{35} \cdot 10$

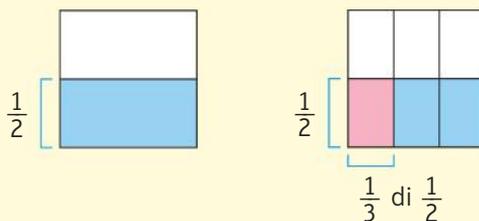
$\frac{50}{49} \cdot 14 \cdot \frac{7}{75}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{21}{22}$

$\frac{44}{15} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{150}{120} \cdot \frac{7}{22}$

**RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI**

- 8 **Modello** Katia ha disegnato un quadrato e lo ha diviso in due parti uguali. Poi ha diviso ciascuna delle due parti in tre parti uguali.



- a. Usa il modello di Katia per calcolare quanto fa  $\frac{1}{3}$  di  $\frac{1}{2}$ .
- b. Dimostra che puoi usare lo stesso modello anche per calcolare  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ . **ESERCIZIO GUIDA 1**
- 9 **Frazioni di pizza** Sul tavolo sono rimasti  $\frac{3}{4}$  di una pizza. Emmanuel vuole mangiare  $\frac{2}{3}$  di questi  $\frac{3}{4}$  di pizza rimasta.
- a. Quale frazione dell'intera pizza mangerà?
- b. Illustra la soluzione con un modello.

- 10 **Incognite** Scrivi i numeri mancanti nelle rispettive caselle.

a.  $\frac{\square}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$

b.  $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{\square} = \frac{2}{21}$

c.  $\frac{\square}{21} \cdot \frac{6}{25} = \frac{2}{35}$

- 11 **Numeri e variabili**

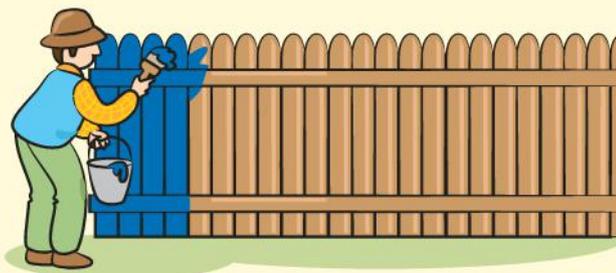
a. Calcola quanto vale  $a \cdot b$  sapendo che:  $a = \frac{5}{6}$ ,  $b = \frac{9}{20}$ .

b. Calcola quanto vale  $x \cdot \frac{3}{4}$  sapendo che:  $x = \frac{2}{9}$ .

c. Calcola quanto vale  $3 \cdot b$  sapendo che:  $b = \frac{1}{6}$ .

$\frac{3}{8}$   
 $\frac{1}{6}$   
 $\frac{1}{2}$

- 12 **MONDO REALE** **Recinto** Baldo impiega  $\frac{3}{4}$  d'ora e usa  $\frac{1}{2}$  kg di pittura per dipingere 5 m di un recinto lungo 40 m.
- a. Quante ore impiegherà per dipingere tutto il recinto?
- b. Quanti kilogrammi di pittura gli servono?



- 13 **SFIDA** **A mente** Trova mentalmente il risultato della seguente moltiplicazione, senza fare nessun calcolo.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10}$

Usa lo stesso ragionamento per calcolare:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$

**Attenzione.** Il prodotto è formato da una sequenza di 99 fattori, che vanno da  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{99}{100}$ .

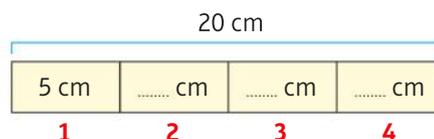


# La divisione di frazioni

Cosa significa dividere due frazioni? Cerchiamo di capirlo facendo un confronto con la divisione di numeri interi.

## ESPLORA

**Numeri interi** Hai una striscia di carta lunga 20 cm e la tagli in pezzi lunghi 5 cm. Quanti pezzi ottieni? Completa lo schema e la risoluzione.



Quante volte il 5 è contenuto nel 20?

..... : ..... = ..... pezzi

**Frazioni** Quante fette da  $\frac{1}{8}$  di torta puoi ottenere da  $\frac{3}{4}$  di torta?

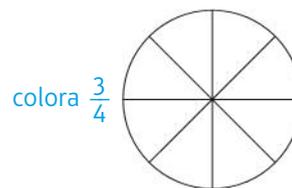
Per trovare la risposta, usa il modello della torta. La torta è divisa in 8 fette, ciascuna delle quali corrisponde a  $\frac{1}{8}$ .

Quante volte  $\frac{1}{8}$  è contenuto in  $\frac{3}{4}$ ?

1) Colora  $\frac{3}{4}$  della torta.

2) Quante fette da  $\frac{1}{8}$  hai colorato?

Dal modello risulta che  $\frac{3}{4}$  di torta contengono 6 fette da  $\frac{1}{8}$  ciascuna, quindi:  $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = 6$ .



## La frazione inversa (o reciproca)

Vediamo ora come si fa per dividere due frazioni senza ricorrere ai modelli. Prima di tutto è necessario imparare cos'è la **frazione inversa** di una data frazione.



### CONCETTO CHIAVE

#### Frazione inversa (o reciproca)

La **frazione inversa** (o **reciproca**) di una data frazione (diversa da 0) si ottiene **scambiando** il numeratore con il denominatore.

### ESERCIZIO GUIDA

**1 Frazioni inverse** Scrivi la frazione inversa di ciascuna delle frazioni date.

Frazione	Frazione inversa
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{1}{8}$	8
7	$\frac{1}{7}$
1	1
0	X

$\frac{4}{3}$  è l'inversa di  $\frac{3}{4}$ .

L'inversa di un'unità frazionaria è un numero intero (ricorda che  $\frac{8}{1} = 8$ ).

L'inverso di un numero intero è un'unità frazionaria (ricorda che  $7 = \frac{7}{1}$ ).

La frazione inversa di 1 è 1.

La frazione inversa di 0 non esiste perché  $\frac{1}{0}$  non ha significato (la divisione per 0 è impossibile).

Notiamo una importante proprietà delle frazioni inverse: **il prodotto di una frazione per la sua inversa è uguale a 1.**

**ESEMPI**

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{28}{28} = 1 \quad \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2} = \frac{18}{18} = 1 \quad 5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

## La regola per la divisione



**CONCETTO CHIAVE**

**Divisione di frazioni**

Per **dividere** due frazioni si **moltiplica** la prima per l'**inversa** della seconda.

**ESERCIZIO GUIDA CON VIDEO TUTORIAL**



**2 Calcoli** Esegui le seguenti divisioni.

- a.  $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$
- b.  $\frac{7}{9} : 5 = \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{45}$
- c.  $6 : \frac{9}{4} = \frac{6^2}{1} \cdot \frac{4}{9^3} = \frac{8}{3}$

La **divisione di due numeri interi** si può scrivere sotto forma di **frazione**:

$$4 : 9 = 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

La linea di frazione ha lo stesso significato del segno di divisione.



## Frazioni a termini frazionari

Una **frazione a termini frazionari** è una frazione in cui il numeratore e/o il denominatore sono frazioni.

La frazione a lato si legge: “ $\frac{2}{5}$  fratto  $\frac{3}{7}$ ”.

Poiché una frazione rappresenta la divisione del numeratore per il denominatore, possiamo scrivere:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{numeratore} \\ \leftarrow \text{linea di frazione principale} \\ \leftarrow \text{denominatore} \end{array}$$

Attenzione alla **linea di frazione principale**: per evitare errori devi scriverla **più lunga** delle altre e **all'altezza del segno =**.

**ESERCIZIO GUIDA**

**3 Frazioni e termini frazionari** Calcola il valore delle seguenti frazioni.

a.  $\frac{\frac{27}{14}}{\frac{18}{35}} = \frac{27}{14} : \frac{18}{35} = \frac{3 \cdot 27}{2 \cdot 14} \cdot \frac{35^5}{18^2} = \frac{15}{4}$  Entrambi i termini della frazione sono frazioni.

b.  $\frac{\frac{3}{8}}{6} = \frac{3}{8} : 6 = \frac{1 \cdot 3}{8} \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{16}$  Il denominatore è un numero intero.

c.  $\frac{12}{\frac{3}{5}} = 12 : \frac{3}{5} = 4 \cdot 12 \cdot \frac{5}{3^1} = 20$  Il numeratore è un numero intero.

d.  $\frac{\frac{12}{3}}{5} = \frac{12}{3} : 5 = \frac{4 \cdot 12}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Attenzione alla linea di frazione principale! Confronta gli esercizi **c.** e **d.**



**ESERCIZI DELLA LEZIONE 3**

**CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE**

**1 Frazione inversa** Scrivi la frazione inversa di ciascuna delle seguenti frazioni (o numeri interi). **ESERCIZIO GUIDA 1**

- a.  $\frac{7}{13} \rightarrow \frac{\dots}{\dots}$
- b.  $12 \rightarrow \frac{\dots}{\dots}$
- c.  $\frac{101}{5} \rightarrow \frac{\dots}{\dots}$
- d.  $\frac{1}{8} \rightarrow \frac{\dots}{\dots}$

**2 A tua scelta** Scrivi una frazione a tua scelta. Moltipicala per la sua inversa. Qual è il risultato ottenuto? Ripeti lo stesso esercizio con altre quattro frazioni.

**3 Regola generale** Se moltiplichi una qualunque frazione per la sua inversa, quale risultato ottieni?

**4 Divisioni** Esegui le seguenti divisioni. Applica tutte le semplificazioni possibili prima di calcolare il quoziente.

**ESERCIZIO GUIDA 2**

- a.  $\frac{3}{11} : \frac{2}{5} = \dots = \dots$
- b.  $\frac{7}{15} : \frac{3}{10} = \dots = \dots$
- c.  $5 : \frac{1}{2} = \dots = \dots$
- d.  $\frac{3}{8} : 2 = \dots = \dots$

**APPLICARE STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI**

**5 Modello** Katia ha disegnato un rettangolo, lo ha diviso in 10 quadretti uguali e ne ha colorati 9.



- a. La parte colorata, che frazione è dell'intero rettangolo?
- b. Poi Katia ha diviso la parte colorata in tre forme uguali. Ciascuna forma, che frazione è dell'intero rettangolo?



- c. Usa il modello di Katia per calcolare quante volte  $\frac{3}{10}$  è contenuto in  $\frac{9}{10}$ .
- d. Scrivi l'operazione rappresentata e il suo risultato. ....

**6 Senza semplificazioni** Esegui le seguenti divisioni.

- |                              |                              |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $\frac{9}{8} : \frac{11}{3}$ | $\frac{5}{7} : \frac{11}{6}$ | $\frac{8}{5} : \frac{7}{3}$  | $\frac{2}{9} : \frac{3}{4}$  |
| $\frac{5}{7} : \frac{6}{5}$  | $\frac{2}{7} : \frac{7}{1}$  | $\frac{5}{2} : \frac{11}{5}$ | $\frac{3}{7} : \frac{2}{13}$ |

**7 Con semplificazioni** Esegui le seguenti divisioni.

- |                                |                                 |                                 |                                 |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\frac{2}{15} : \frac{19}{30}$ | $\frac{11}{14} : \frac{33}{28}$ | $\frac{17}{13} : \frac{34}{26}$ | $\frac{28}{25} : \frac{28}{75}$ |
| $\frac{7}{6} : \frac{5}{12}$   | $\frac{3}{10} : \frac{30}{25}$  | $\frac{7}{6} : \frac{7}{12}$    | $\frac{4}{15} : \frac{11}{30}$  |

**8 Con tre termini** Esegui le seguenti divisioni.

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} : \frac{6}{25}$ | $\frac{3}{4} : 4 : \frac{1}{2}$ |
| $2 : \frac{1}{8} : \frac{32}{3}$           | $20 : \frac{1}{3} : 30$         |

Per fare la divisione di frazioni con tre termini lascio invariato il dividendo e inverto tutti i divisori:

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{3} : \frac{6}{25} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{6}$$



**9 Frazioni a termini frazionari** Calcola il valore delle seguenti frazioni. **ESERCIZIO GUIDA 3**

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{\frac{18}{55}}{\frac{27}{33}}$$

$$\frac{10}{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{9}{\frac{7}{3}}$$

**RAGIONARE** IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI

**10 Più grande!** Quando si dividono due numeri (e anche le frazioni), il risultato può essere più grande del dividendo.

a. Per esempio, calcola quanto fa  $3 : 0,5$ .  
Come si spiega il risultato?

La figura a lato mostra 3 pizze tagliate a metà.

b. Usa il modello per spiegare che  $3 : \frac{1}{2} = 6$ .



**11 Completa** Scrivi i numeri mancanti nelle rispettive caselle.

$$5 : \frac{1}{\square} = 15$$

$$\frac{4}{9} : \frac{4}{\square} = 1$$

$$\frac{10}{\square} : \frac{15}{7} = \frac{2}{9}$$

**12 Più soluzioni**

a. Scrivi due numeri nelle caselle in modo che la seguente uguaglianza sia verificata.

$$\frac{\square}{5} : \frac{3}{\square} = 1$$

b. Confronta la tua soluzione con quelle dei tuoi compagni.

c. Quante soluzioni ha questo esercizio?

**13 Numeri e variabili**

a. Calcola quanto vale  $a : b$  sapendo che:  $a = \frac{6}{13}$ ,  $b = \frac{9}{26}$ .

$$\left[ \frac{4}{3} \right]$$

b. Calcola quanto vale  $x : \frac{3}{5}$  sapendo che:  $x = \frac{4}{15}$ .

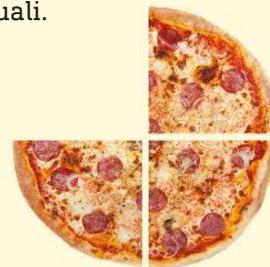
$$\left[ \frac{4}{9} \right]$$

c. Calcola quanto vale  $\frac{a}{b} : \frac{c}{b}$  sapendo che:  $a = 7$ ,  $b = 159$ ,  $c = 12$ .

$$\left[ \frac{7}{12} \right]$$

**14 Divisione della pizza** Quattro amici si devono dividere  $\frac{3}{4}$  di pizza in parti uguali.

Quale frazione dell'intera pizza riceverà ciascuno di loro? .....



**15 MONDO REALE Recinto** Aldo ha dipinto  $\frac{5}{16}$  di un recinto usando  $\frac{1}{2}$  kg di pittura.

Quanti kilogrammi di pittura deve ancora usare per completare il lavoro?



# La potenza di una frazione

## Il calcolo delle potenze

La definizione di potenza di una frazione è uguale a quella che abbiamo già studiato per i numeri interi. Occorre però fare molta attenzione ai calcoli perché la frazione è formata da due numeri.

La **potenza di una frazione** si indica racchiudendo la frazione tra parentesi e scrivendo l'esponente in alto a destra.



### CONCETTO CHIAVE

#### Potenza di una frazione

- La **potenza di una frazione** è un prodotto di tanti fattori uguali a quella frazione quanti ne indica l'esponente.
- Per **elevare a potenza una frazione** si elevano a quella potenza il numeratore e il denominatore.

$$\begin{array}{c} \text{esponente} \\ \downarrow \\ \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ \text{base} \end{array}$$

Questa potenza si legge “due quinti alla terza” oppure “due quinti al cubo”.

### ESERCIZI GUIDA

**1 Potenze di frazioni** Calcola le seguenti potenze.

- a.  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$  Due terzi alla quarta.
- b.  $\left(\frac{3}{7}\right)^1 = \frac{3}{7}$  Tre settimi alla prima.
- c.  $\left(\frac{9}{13}\right)^0 = 1$  Nove tredicesimi alla zero.

**2 Attenzione alla scrittura!** Calcola le seguenti potenze.

- a.  $\left(\frac{5}{11}\right)^2 = \frac{25}{121}$  Cinque undicesimi alla seconda.
- b.  $\frac{5^2}{11} = \frac{25}{11}$  Cinque alla seconda diviso undici.
- c.  $\frac{5}{11^2} = \frac{5}{121}$  Cinque diviso undici alla seconda.

a. Questa è una potenza di frazione:

$$\left(\frac{5}{11}\right)^2 = \frac{25}{121}$$

b. Queste invece non sono potenze di frazione:

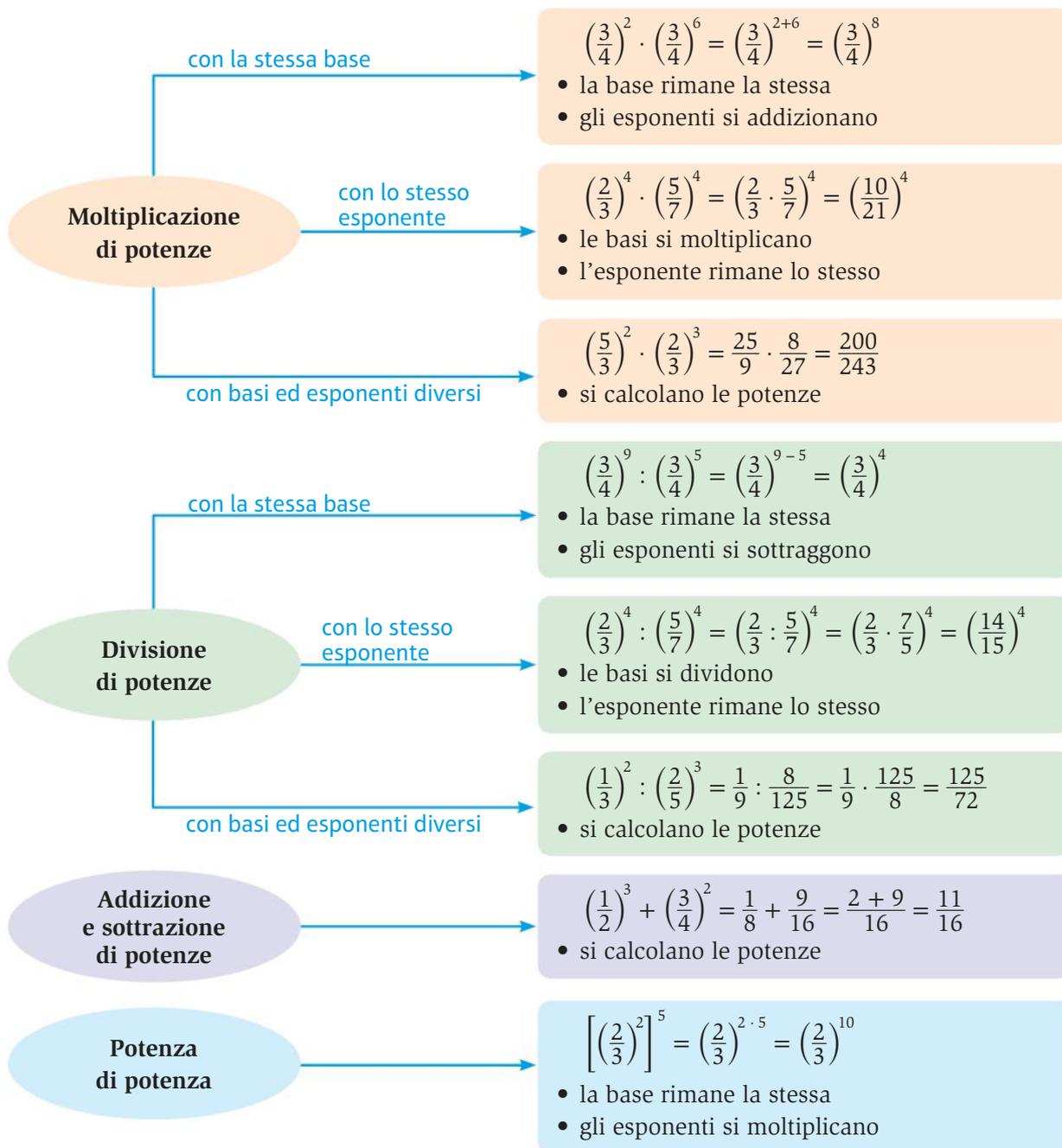
$$\frac{5}{11^2} \quad \frac{5^2}{11}$$

Qui dobbiamo elevare a potenza soltanto il denominatore o il numeratore.



## Le proprietà delle potenze

Per le frazioni valgono le stesse proprietà delle potenze che abbiamo già visto per i numeri interi. Ripassiamole tutte con alcuni esempi.



### ESERCIZIO GUIDA

**3 Operazioni** Esegui le seguenti operazioni applicando le proprietà delle potenze.

a.  $\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{7+4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{11}$

Moltiplicazione

b.  $\left(\frac{2}{13}\right)^7 : \left(\frac{2}{13}\right)^4 = \left(\frac{2}{13}\right)^{7-4} = \left(\frac{2}{13}\right)^3$

Divisione

c.  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{9} + \frac{1}{8} = \frac{32+9}{72} = \frac{41}{72}$

Addizione

d.  $\left[\left(\frac{8}{21}\right)^7\right]^4 = \left(\frac{8}{21}\right)^{28}$

Potenza di potenza

**ESERCIZI DELLA LEZIONE 4**

**CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE**

**1 Dalla moltiplicazione alla potenza** Scrivi le seguenti moltiplicazioni sotto forma di potenze e calcola i risultati.

a.  $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$

b.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \dots = \dots$

c.  $\frac{11}{15} \cdot \frac{11}{15} = \dots = \dots$

d.  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \dots = \dots$

**2 Dalla potenza alla moltiplicazione** Scrivi le seguenti potenze sotto forma di moltiplicazioni e calcola i risultati.

a.  $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$

b.  $\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \dots = \dots$

c.  $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \dots = \dots$

d.  $\left(\frac{2}{7}\right)^1 = \dots \quad \left(\frac{5}{9}\right)^0 = \dots$

**3 Potenza di una frazione** Completa le seguenti definizioni.

a. La potenza di una frazione è un prodotto di tanti ..... quanti ne indica l'esponente.

b. Per elevare a potenza una frazione si elevano a quella potenza il ..... e il .....

**4 Proprietà delle potenze** Esegui le seguenti operazioni lasciando il risultato sotto forma di potenza. Quali proprietà delle potenze hai usato? **ESERCIZIO GUIDA 3**

a.  $\left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{15} = \dots$

b.  $\left(\frac{8}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \dots$

c.  $\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \dots$

d.  $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^5\right]^9 = \dots$

**APPLICARE STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI**

**5 Potenze** Calcola le seguenti potenze.

**ESERCIZIO GUIDA 1**

a.  $\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \dots$  e.  $\left(\frac{15}{92}\right)^0 = \dots$

b.  $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \dots$  f.  $\left(\frac{2}{4}\right)^3 = \dots$

c.  $\left(\frac{5}{9}\right)^1 = \dots$  g.  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \dots$

d.  $\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \dots$  h.  $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \dots$

**6 Confronta** Le seguenti espressioni si assomigliano ma hanno tre valori diversi. Esegui i calcoli e spiega le somiglianze e le differenze. **ESERCIZIO GUIDA 2**

a.  $\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \dots$  c.  $\frac{5^2}{9} = \dots$

b.  $\frac{5}{9^2} = \dots$  d.  $\frac{5^2}{9^2} = \dots$

**7 Operazioni con le potenze** Esegui i calcoli. Quando è possibile semplifica il risultato.

a.  $\frac{200}{15^2} = \dots$  c.  $\frac{3^3}{2^2} = \dots$

b.  $\frac{9^2}{72} = \dots$  d.  $\frac{12^2}{4^3} = \dots$

**8 Operazioni con le proprietà** Esegui le seguenti operazioni applicando dove possibile le proprietà delle potenze.

a.  $\left(\frac{8}{5}\right)^7 : \left(\frac{8}{5}\right)^5 = \dots$

b.  $\left(\frac{2}{17}\right)^3 \cdot \left(\frac{34}{5}\right)^3 = \dots$

c.  $\left(\frac{25}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{35}\right)^{12} = \dots$

d.  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \dots$

e.  $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \dots$

f.  $\left(\frac{5}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \dots$

**RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI**

**9 Cubo** Calcola il cubo di tutte le frazioni improprie aventi come numeratore 7.

**10 Incognite** Scrivi nelle caselle i numeri mancanti.

$$\left(\frac{2}{\square}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\frac{6^2}{\square} = 2$$

$$\frac{\square}{5^2} = \frac{1}{5}$$

**11 Numeri e variabili**

a. Calcola quanto vale  $1 + a^3$  sapendo che:  $a = \frac{1}{2}$ . [9/8]

b. Calcola quanto vale  $\frac{a^2}{b}$  sapendo che:  $a = 9, b = 36$ . [9/4]

c. Calcola quanto vale  $\frac{25}{4} - \frac{5}{b^2}$  sapendo che:  $b = 2$ . [5]

**12 Maggiore o minore?** Rispondi alle seguenti domande facendo un ragionamento oppure un calcolo mentale.

- a.  $3^2$  è maggiore o minore di 3? .....
- b.  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$  è maggiore o minore di  $\frac{1}{2}$ ? .....
- c.  $\left(\frac{9}{10}\right)^2$  è maggiore o minore di  $\frac{9}{10}$ ? .....
- d.  $\left(\frac{10}{9}\right)^2$  è maggiore o minore di  $\frac{10}{9}$ ? .....
- e.  $\left(\frac{5}{5}\right)^2$  è maggiore o minore di  $\frac{5}{5}$ ? .....
- f.  $\left(\frac{5}{5}\right)^2$  è maggiore o minore di  $\frac{4}{4}$ ? .....

Attenzione alle ultime due domande!



**13 COME UN MATEMATICO Regola generale**

Usa i risultati dell'esercizio precedente per formulare una regola generale. Completa i fumetti.

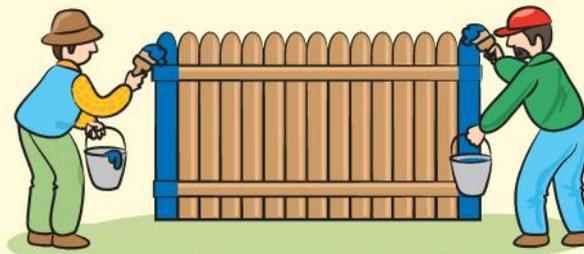
Il quadrato di una frazione ..... è sempre minore della frazione stessa.

Il quadrato di una frazione ..... è sempre maggiore o ..... della frazione stessa.



**14 Recinto** Aldo e Baldo hanno l'incarico di dipingere un recinto di legno lungo 72 m. Aldo ha pitturato  $\frac{1}{3}$  di  $\frac{1}{3}$  del recinto e Baldo ne ha pitturato la metà della metà della metà.

- a. Quanti metri di recinto hanno pitturato in tutto? [17 m]
- b. Quanti metri ne devono ancora pitturare? [55 m]



$$\frac{1}{3} \text{ di } \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} \text{ di } \frac{1}{2} \text{ di } \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$



# Le espressioni contenenti frazioni

## Precedenza delle operazioni

Per calcolare un'espressione contenente frazioni si applicano le stesse regole che abbiamo già visto per le espressioni contenenti numeri interi e decimali. I calcoli, però, sono un po' più complicati perché dobbiamo operare con le frazioni. Facciamo un breve ripasso delle regole sulla precedenza delle operazioni.



### CONCETTO CHIAVE

#### Precedenza delle operazioni

Per risolvere un'espressione bisogna eseguire le operazioni rispettando alcune **regole di precedenza** nel calcolo.

- 1) Prima si calcolano le **potenze**, applicando quando possibile le loro proprietà.
- 2) Poi si calcolano le **moltiplicazioni** e le **divisioni**, nell'ordine in cui sono scritte.
- 3) Infine si calcolano le **addizioni** e le **sottrazioni**, nell'ordine in cui sono scritte.

### ESERCIZI GUIDA

**1 Senza parentesi** Risolvi la seguente espressione contenente frazioni.

$$\begin{aligned} & \frac{7}{8} : \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{6} - \frac{7}{12} - \frac{1}{36} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\ & = \frac{7}{8} : \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12} - \frac{1}{36} - 3 \cdot \frac{1}{4} = \\ & = \frac{7}{8} \cdot \frac{2^1}{1} \cdot \frac{4^1}{9} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12} - \frac{1}{36} - \frac{3}{4} = \\ & = \frac{7}{9} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12} - \frac{1}{36} - \frac{3}{4} = \\ & = \frac{28 + 30 - 21 - 1 - 27}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Calcoliamo le potenze.

Eseguiamo le moltiplicazioni e le divisioni, semplificando, quando è possibile.

Riduciamo al minimo comune denominatore e calcoliamo le addizioni e le sottrazioni.

**2 Con proprietà delle potenze** Risolvi la seguente espressione applicando le proprietà delle potenze.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{5}\right)^{13} : \left(\frac{3}{5}\right)^{11} + \frac{15}{8} : \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} - \left(\frac{6}{5}\right)^5 : \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \\ & = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{15}{8} : \frac{25}{16} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \\ & = \frac{9}{25} + \frac{15}{8} : \frac{25}{16} + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{10} - \frac{36}{25} = \\ & = \frac{9}{25} + \frac{3 \cdot 15}{1 \cdot 8} \cdot \frac{16^2}{25^2} + \frac{7}{25} - \frac{36}{25} = \\ & = \frac{9}{25} + \frac{6}{5} + \frac{7}{25} - \frac{36}{25} = \\ & = \frac{9 + 30 + 7 - 36}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Applichiamo le proprietà e calcoliamo le potenze.

Eseguiamo le moltiplicazioni e le divisioni, semplificando, quando è possibile.

Riduciamo al minimo comune denominatore ed eseguiamo le addizioni e le sottrazioni.

## Espressioni con parentesi

Quando nelle espressioni ci sono le parentesi, per prima cosa si risolvono i calcoli racchiusi dentro le parentesi, cominciando da quelle più interne, che sono le **tonde** ( ), seguite dalle **quadre** [ ] e dalle **graffe** { }.

Eliminate tutte le parentesi, si risolve l'espressione rimasta.

Dentro ogni parentesi si seguono le regole di precedenza fra operazioni che già conosciamo.

A ogni passaggio, le operazioni che non si svolgono si devono riscrivere così come sono: attenzione a trascrivere numeri e segni di operazione correttamente!

### ESERCIZI GUIDA CON VIDEO TUTORIAL



#### 3 Con parentesi Risolvi la seguente espressione.

$$\left[ \left( \frac{4}{3} - \frac{5}{3^2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{3} \right)^2 \right] : \frac{5}{4} =$$

Ricorda che:  $\frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$ .

$$= \left[ \left( \frac{12-5}{9} \right) - \left( \frac{3-1}{3} \right)^2 \right] : \frac{5}{4} =$$

Prima risolviamo le parentesi tonde.

$$= \left[ \frac{7}{9} - \frac{4}{9} \right] : \frac{5}{4} =$$

Nota che:  $\left( \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}$ .

$$= \frac{1}{3} : \frac{5}{4} =$$

Poi risolviamo le parentesi quadre e riduciamo il risultato.

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

Infine risolviamo l'espressione rimasta senza parentesi.

#### 4 Frazioni a castello Risolvi la seguente espressione contenente frazioni a termini frazionari.

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{14} \cdot \frac{21}{8}}{\frac{6}{8} + 1} =$$

Risolviamo separatamente le espressioni al numeratore e al denominatore.

$$= \frac{\frac{2}{3} + \frac{15}{16}}{\frac{6+8}{8}} =$$

Nota che  $\frac{5}{14} \cdot \frac{21}{8} = \frac{15}{16}$ .

$$= \frac{\frac{32+45}{48}}{\frac{7}{4}} =$$

Calcoliamo la somma di frazioni al numeratore.

Nota che  $\frac{14}{8} = \frac{7}{4}$ .

$$= \frac{\frac{77}{48}}{\frac{7}{4}} = \frac{77}{48} : \frac{7}{4} =$$

Trasformiamo la frazione grande in una divisione.

$$= \frac{11}{12} \cdot \frac{4}{7} = \frac{11}{21}$$

Calcoliamo la divisione.



Per oggi abbiamo finito con le espressioni!

**ESERCIZI DELLA LEZIONE 5**

**CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE**

Mentre svolgi gli esercizi spiega oralmente il procedimento che segui.



**1 Precedenza delle operazioni** Completa la seguente regola.

Per risolvere un'espressione:

- 1) prima si calcolano \_\_\_\_\_;
- 2) poi si calcolano le \_\_\_\_\_ e le \_\_\_\_\_ nell'ordine in cui \_\_\_\_\_;
- 3) infine si calcolano le \_\_\_\_\_ e le \_\_\_\_\_ nell'ordine in cui \_\_\_\_\_.

**2 Espressioni senza parentesi** Risolvi le seguenti espressioni. **ESERCIZIO GUIDA 1**

- a.  $\frac{9}{14} \cdot \frac{6}{35} - \frac{15}{8} \cdot \frac{12}{10}$  [3]
- b.  $\frac{15}{4} \cdot \frac{14}{30} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}$  [9/4]
- c.  $\frac{35}{11} \cdot \frac{33}{28} - \frac{20}{7} : 16$  [25/7]

**3 Espressioni con parentesi** Risolvi le seguenti espressioni. **ESERCIZIO GUIDA 3**

- a.  $\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right) : \frac{11}{8}$  [2]
- b.  $\frac{14}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\right)$  [13/3]
- c.  $\left(2 + \frac{4}{7}\right) : 9$  [2/7]

**4 Espressioni contenenti potenze** Risolvi le seguenti espressioni. **ESERCIZIO GUIDA 2**

- a.  $\left(\frac{8}{15}\right)^0 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 - \frac{1}{100}$  [1/2]
- b.  $\left(\frac{7}{9}\right)^1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2^3}{5}$  [13/5]
- c.  $\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2^2}$  [1]

**APPLICARE STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI**

**Espressioni** Risolvi le seguenti espressioni.

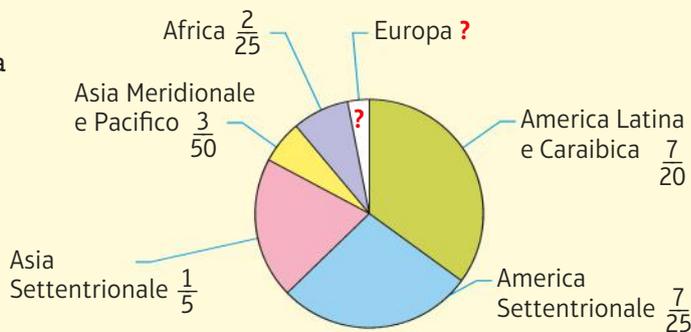
- 5  $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{15}{46}$  [3/8]
- 6  $\frac{5}{6} : \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{15} - \frac{7}{30}\right)$  [5/3]
- 7  $\left(\frac{2}{15} + \frac{7}{10}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) + \frac{3}{4}$  [7/6]
- 8  $\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{10}{13} - \frac{7}{26}\right) + \frac{3}{6} + \frac{1}{36}$  [8/9]
- 9  $\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{6}\right) : \left(7 - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{80}$  [1/2]
- 10  $\frac{8}{15} + \left(\frac{4}{15} + \frac{7}{3}\right) : \left(\frac{10}{3} - \frac{7}{6}\right) - \frac{2}{5}$  [4/3]
- 11  $\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} + \frac{1}{6}\right) - \frac{8}{9} + \left(\frac{14}{6} - \frac{1}{4} : \frac{3}{8}\right)$  [22/9]
- 12  $\frac{4 + \frac{2}{3}}{5 - \frac{4}{5}}$  **ESERCIZIO GUIDA 4** [10/9]
- 13  $\frac{\frac{4}{15} + \frac{7}{3}}{\frac{10}{3} - \frac{7}{6}}$  [6/5]
- 14  $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{7}{2^5}$  [1/4]

**RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI**

**15 Le ultime foreste** Il grafico a lato illustra la distribuzione delle ultime foreste primarie nel mondo.

Quale frazione rappresentano le foreste europee?

Fai una stima a occhio, poi calcola la risposta esatta con un'espressione aritmetica.



**16 Parole e numeri** Traduci in linguaggio matematico e risolvi le seguenti espressioni.

- Dividi 20 per  $\frac{1}{2}$  e aggiungi 5 al risultato.
- Moltiplica per  $\frac{5}{3}$  la somma di 1 e  $\frac{4}{3}$ .
- Eleva al quadrato la differenza di  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{1}{2}$ .

**17 1-2-3-4** Scrivi i numeri 1, 2, 3, 4 nelle caselle in modo da ottenere la somma più grande possibile.

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$$

**18 A mente** Spiega come potresti risolvere la seguente espressione a mente, senza fare alcun calcolo. Scrivi il risultato e poi verificalo facendo tutti i calcoli.

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}\right)$$

**19 SCIENZE** **Frequenza cardiaca massima**

Quando il nostro corpo è sotto sforzo, il cuore batte più velocemente.

La **frequenza cardiaca massima** ( $FC_{\max}$ ) è il numero di battiti al minuto più alto possibile che non provoca danni al cuore. Dipende dall'età in anni di una persona e si calcola con la formula:

$$FC_{\max} = 211 - \frac{16}{25} \cdot \text{età}$$

- Kevin ha 15 anni. Calcola la sua frequenza cardiaca massima.
- Il nonno di Kevin ha 70 anni. Qual è la sua frequenza cardiaca massima?

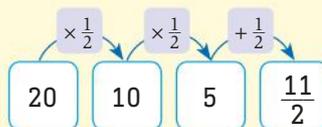
[a. 201,4; b. 166,2]



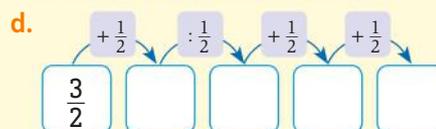
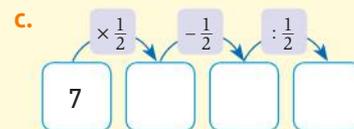
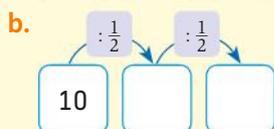
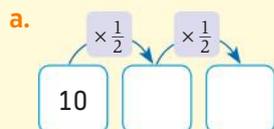
**20 G I O C O** **La calcolatrice di Giulia** Giulia ha una calcolatrice con 4 tasti speciali:

- il tasto  $+\frac{1}{2}$  aggiunge  $\frac{1}{2}$  al numero scritto sul visore;
- il tasto  $-\frac{1}{2}$  sottrae  $\frac{1}{2}$  dal numero scritto sul visore;
- il tasto  $\times\frac{1}{2}$  moltiplica per  $\frac{1}{2}$  il numero scritto sul visore;
- il tasto  $:\frac{1}{2}$  divide per  $\frac{1}{2}$  il numero scritto sul visore.

Per esempio, se Giulia digita il numero 20 e preme in successione i tasti  $\times\frac{1}{2}$   $\times\frac{1}{2}$   $+\frac{1}{2}$  ottiene come risultato finale  $\frac{11}{2}$ .



Calcola i risultati che si ottengono nei seguenti casi. Completa gli schemi.



# Problemi fondamentali sulle frazioni

In questa lezione impareremo a distinguere e risolvere due tipi di problemi con le frazioni, chiamati **problema diretto** e **problema inverso**.

## Problema fondamentale diretto

### ESPLORA

**Listello** Un listello di legno è lungo 90 cm. Quanto misurano i suoi  $\frac{2}{5}$ ?

Conosci la lunghezza del listello e devi calcolarne i  $\frac{2}{5}$ .

1) Dividi per il denominatore e trovi  $\frac{1}{5}$  del listello:

$$90 \text{ cm} : \dots = \dots$$

2) Moltiplichi per il numeratore e trovi i  $\frac{2}{5}$  del listello:

$$\dots \cdot 2 = \dots$$

Quindi i  $\frac{2}{5}$  del listello misurano ..... cm.

Lo stesso risultato si ottiene **moltiplicando**

la lunghezza del listello per  $\frac{2}{5}$ :

$$90 \text{ cm} \cdot \frac{2}{5} = \frac{90}{1} \cdot \frac{2}{5} \text{ cm} = 36 \text{ cm}$$

frazione =  $\frac{2}{5}$



Conosci già questo procedimento.  
Lo riprendiamo per un breve ripasso.



### CONCETTO CHIAVE

#### Problema diretto

Per **calcolare una frazione di un numero (o di una grandezza)** si procede così:

- 1) si divide il numero (o la misura della grandezza) per il denominatore della frazione;
- 2) si moltiplica il risultato per il numeratore.

Tale procedura equivale a **moltiplicare il numero per la frazione**.

## Problema fondamentale inverso

### ESERCIZIO GUIDA

**1 Cioccolatini** Sofia ha mangiato 6 cioccolatini, pari ai  $\frac{3}{8}$  di quelli che si trovavano in una scatola. Quanti cioccolatini conteneva la scatola?

Sappiamo che 6 cioccolatini corrispondono ai  $\frac{3}{8}$  del totale e dobbiamo trovare il totale.

In questo caso il procedimento è l'inverso di quello del problema precedente.

$$6 : 3 = 2 \text{ cioccolatini}$$

Dividiamo per il numeratore e troviamo  $\frac{1}{8}$  di tutti i cioccolatini.

$$2 \cdot 8 = 16 \text{ cioccolatini}$$

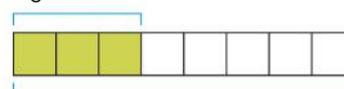
Moltiplichiamo per il denominatore e troviamo il totale dei cioccolatini.

**Risposta:** la scatola conteneva 16 cioccolatini.

Lo stesso risultato si ottiene **dividendo** il numero dei cioccolatini mangiati per  $\frac{3}{8}$ :

$$6 : \frac{3}{8} = \frac{6}{1} \cdot \frac{8}{3} = 16 \text{ cioccolatini}$$

$\frac{3}{8} \rightarrow 6$  cioccolatini



$\frac{8}{8} \rightarrow$  totale dei cioccolatini



**CONCETTO CHIAVE**

**Problema inverso**

Per **calcolare un numero (o una grandezza) conoscendo una sua frazione** si procede così:

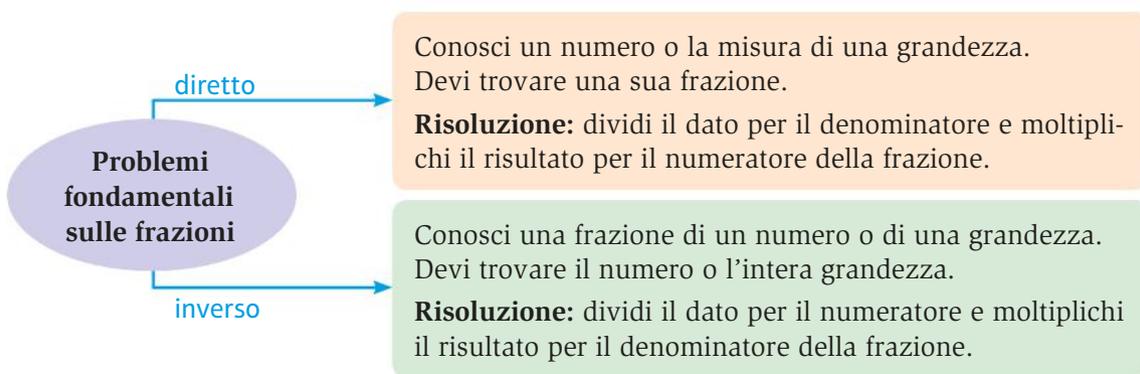
- 1) si divide il numero (o la misura della grandezza) per il numeratore della frazione;
- 2) si moltiplica il risultato per il denominatore.

Tale procedura equivale a **dividere il numero per la frazione**.

**Diretto o inverso?**

Per riconoscere se un problema è diretto o inverso devi **esaminare attentamente i dati e la domanda**. Lo schema seguente potrà aiutarti.

Attenzione! Una lettura superficiale e distratta del testo potrebbe farti scambiare lucciole per lanterne!



**ESERCIZIO GUIDA CON VIDEO TUTORIAL**



**2 Il ciclista Mario** Leggi i testi dei seguenti problemi.

Per ciascuno di essi stabilisci se è un problema diretto o inverso e risolvi.

**Problema A**

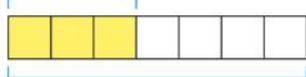
Mario deve percorrere un tragitto di 42 km in bicicletta. Ha già percorso  $\frac{3}{7}$  di tale tragitto.

**Quanti chilometri ha percorso?**

Conosciamo l'intera lunghezza del tragitto, cioè 42 km, e dobbiamo calcolarne una parte, cioè  $\frac{3}{7}$ .

Perciò questo è un **problema diretto**.

frazione =  $\frac{3}{7}$



intero tragitto = 42 km

Calcoliamo  $\frac{3}{7}$  di 42 km:

$$42 \text{ km} : 7 \cdot 3 = 18 \text{ km}$$

**Risposta:** Mario ha percorso 18 km.

**Problema B**

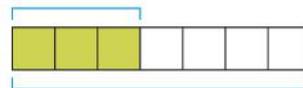
Mario ha già percorso 42 km che corrispondono ai  $\frac{3}{7}$  dell'intero tragitto che deve percorrere.

**Quanto è lungo l'intero tragitto?**

Sappiamo che i 42 km già percorsi sono una parte che corrisponde ai  $\frac{3}{7}$  dell'intero tragitto. Dobbiamo calcolare l'intero tragitto.

Perciò questo è un **problema inverso**.

frazione =  $\frac{3}{7} \rightarrow 42 \text{ km}$



intero tragitto =  $\frac{7}{7}$

Calcoliamo la lunghezza del tragitto:

$$42 \text{ km} : 3 \cdot 7 = 98 \text{ km}$$

**Risposta:** il tragitto è lungo 98 km.

**ESERCIZI DELLA LEZIONE 6**

**CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE**

**1 Dal totale alla frazione** Nei seguenti esercizi calcola la frazione richiesta.

- a.  $\frac{3}{5}$  di 20 € →  $20 \text{ €} : 5 \cdot 3 = 12 \text{ €}$
- b.  $\frac{25}{100}$  di 360 giorni → ..... : ..... · ..... = .....
- c.  $\frac{2}{3}$  di 1 L (litro) → ..... : ..... · ..... = .....
- d.  $\frac{5}{8}$  di 456 km → ..... : ..... · ..... = .....
- e.  $\frac{1}{15}$  di 75 kg → ..... : ..... · ..... = .....



**2 Il problema diretto** Completa il procedimento per risolvere un problema diretto.

Per calcolare una frazione di un numero (o di una grandezza):

- 1) si divide il numero (o la misura della grandezza) per il .....
  - 2) si moltiplica il risultato per il .....
- Tale procedura equivale a ..... il numero per la frazione.

**3 Banconota** Giulia ha speso  $\frac{7}{10}$  di una banconota da 20 €. Quanto ha speso? **ESERCIZIO GUIDA 1**

**4 Pecore** Nella figura vedi  $\frac{2}{15}$  delle pecore di Giovanni.  
Quante sono in tutto le pecore di Giovanni?



**5 Il problema inverso** Completa il procedimento per risolvere un problema inverso.

Per calcolare un numero (o una grandezza) conoscendo una sua frazione:

- 1) si divide il numero (o la misura della grandezza) per il .....
  - 2) si moltiplica il risultato per il .....
- Tale procedura equivale a ..... il numero per la frazione.

**6 Dalla frazione al totale** Nei seguenti esercizi calcola il numero o la grandezza conoscendo la sua parte corrispondente a una data frazione.

- a. I  $\frac{2}{3}$  di una quantità di mele pesano 12 kg. Quanto pesano tutte le mele?  $12 \text{ kg} : 2 \cdot 3 = 18 \text{ kg}$
- b. I  $\frac{5}{16}$  di un mattone pesano 0,875 kg. Quanto pesa il mattone? ..... : ..... · ..... = .....
- c. I  $\frac{25}{100}$  di una somma sono 80 €. Quanto è la somma? ..... : ..... · ..... = .....
- d. Il numero 9 è  $\frac{3}{10}$  di quale numero? ..... : ..... · ..... = .....
- e. I  $\frac{3}{4}$  di un nastro misurano 1,2 m. Quanto è lungo tutto il nastro? ..... : ..... · ..... = .....

**APPLICARE** STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI

Leggi i testi dei seguenti problemi. Per ciascuno di essi indica con una crocetta se è un problema diretto o inverso e risolvi. **ESERCIZIO GUIDA 2**

**7 Rettangolo 1** La base di un rettangolo misura 21 cm ed è  $\frac{3}{7}$  dell'altezza.

- a. Quanto misura l'altezza?
- b. Quanto misura il perimetro del rettangolo?

Il problema è:  diretto  inverso

**8 Rettangolo 2** La base di un rettangolo è  $i \frac{5}{9}$  dell'altezza. L'altezza misura 45 cm.

- a. Quanto misura la base?
- b. Quanto misura il perimetro del rettangolo?

Il problema è:  diretto  inverso

**9 Compleanno** Un padre dice al figlio: "Buon compleanno! Oggi compi 14 anni e la tua età è  $\frac{2}{7}$  della mia."

Quanti anni ha il padre?

Il problema è:  diretto  inverso

**10 Fratelli** Il fratello di Mario ha 28 anni. L'età di Mario è  $\frac{11}{14}$  di quella di suo fratello.

Quanti anni ha Mario?

Il problema è:  diretto  inverso

**11 Lavatrice** Ho acquistato una lavatrice versando un anticipo di 70 €, che corrispondono ai  $\frac{2}{10}$  dell'intero costo.

- a. Quanto costa la lavatrice?
- b. Quanto mi rimane ancora da pagare?

Il problema è:  diretto  inverso

**12 Vasca** Una vasca della capacità di 320 L è piena per  $\frac{3}{4}$ .

- a. Quanti litri d'acqua contiene?
- b. Quanta acqua si dovrà ancora versare per riempirla completamente?

Il problema è:  diretto  inverso

**RAGIONARE** IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI

**13 Stoffa** Si vendono  $i \frac{5}{8}$  di un rotolo di tessuto lungo 40 m al prezzo di 9,90 € al metro.

- a. Quanti metri di stoffa si sono venduti?
- b. Qual è stato il ricavo?
- c. Quanta stoffa è rimasta?

**14 MONDO REALE Grano, farina, pane** Dal grano si ottengono  $i \frac{7}{10}$  del suo peso in farina. Dalla farina si ottengono  $i \frac{6}{5}$  del suo peso in pane.



Quanti kilogrammi di pane si ottengono da 375 kg di grano?

Per calcolare  $i \frac{6}{5}$  dei  $\frac{7}{10}$  posso moltiplicare le due frazioni. In pratica devo calcolare una **frazione di frazione**.

**15 Livello di benzina** Nel serbatoio di un'auto si trovano 18 L di benzina. L'indicatore del livello segna  $i \frac{3}{8}$  del pieno.

- a. Qual è la capacità del serbatoio?
- b. Se il proprietario fa il pieno, quanto spende?

Quanto costa la benzina al litro? Informati!



**16 Risparmi** Andrea guadagna 1242 € al mese. Decide di risparmiare  $\frac{2}{9}$  dello stipendio.

- a. Quanto spende ogni mese?
- b. Quanto risparmia in un anno?

**17 Corso di musica** Dei 420 alunni di una scuola, gli  $\frac{8}{15}$  si sono iscritti a un corso di musica, ma solo  $i \frac{6}{7}$  degli iscritti ha effettivamente frequentato il corso.

- a. Quanti alunni della scuola si sono iscritti al corso?
- b. Quanti alunni lo hanno frequentato?

# Altri problemi sulle frazioni

## Risultato sotto forma di frazione

In alcune situazioni i dati del problema e la soluzione sono tutti espressi **sotto forma di frazioni**. In questi casi dobbiamo operare con le frazioni anche senza conoscere i valori delle grandezze in gioco.

### ESERCIZIO GUIDA

**1 Libro** Emma deve leggere un libro in 4 giorni. Lunedì ha letto  $\frac{3}{10}$  del libro, martedì ne ha letto  $\frac{1}{5}$  e mercoledì  $\frac{1}{3}$ . Quale frazione del libro le rimane da leggere giovedì?

Anche se non sappiamo **quante pagine** ha il libro, possiamo comunque rispondere alla domanda.

- 1) Disegniamo un modello del problema.
- 2) Calcoliamo quale frazione del libro ha già letto Emma.

Semplifichiamo il risultato.

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9 + 6 + 10}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

- 3) Indichiamo l'intero libro con  $1 = \frac{6}{6}$  e calcoliamo quale frazione le rimane da leggere:

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

**Risposta:** Emma deve ancora leggere  $\frac{1}{6}$  del libro.



## Problemi più complessi

Per risolvere problemi matematici complessi si deve leggere attentamente il testo ed elaborare un piano d'azione in più passaggi. Vediamo un esempio.

### ESERCIZIO GUIDA

**2 Olio** Un serbatoio contiene 450 litri d'olio. Dapprima si prelevano 30 litri di olio, poi  $\frac{6}{21}$  del resto. Con l'olio rimasto nel serbatoio si riempiono delle bottiglie da  $\frac{3}{4}$  di litro. Le bottiglie sono vendute a 8,50 € ciascuna.

**Quanto si ricava dalla vendita delle bottiglie d'olio?**

- 1) Calcoliamo quanto olio rimane nel serbatoio dopo il primo prelevamento:

$$450 \text{ L} - 30 \text{ L} = 420 \text{ L}$$

- 2) Calcoliamo quanto olio rimane nel serbatoio dopo il secondo prelevamento:

$$420 \text{ L} : 21 \cdot 6 = 120 \text{ L} \quad \text{Secondo prelevamento}$$

$$420 \text{ L} - 120 \text{ L} = 300 \text{ L} \quad \text{Olio rimasto nel serbatoio}$$

- 3) Calcoliamo quante bottiglie si riempiono:

$$300 \text{ L} : \frac{3}{4} \text{ L} = 400 \text{ bottiglie}$$

- 4) Calcoliamo il ricavo:

$$400 \cdot 8,50 \text{ €} = 3400 \text{ €}$$

**Risposta:** Dalla vendita delle bottiglie si ricavano 3400 €.



**ESERCIZI DELLA LEZIONE 7**

**CONOSCERE CONCETTI E PROCEDURE**

- 1 **Ciclista** Un ciclista ha percorso dapprima  $\frac{3}{8}$  e poi  $\frac{5}{12}$  di una strada.  
Quale frazione di strada deve ancora percorrere? **ESERCIZIO GUIDA 1**

$\left[\frac{5}{24}\right]$

**APPLICARE STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI E MODELLI**

- 2 **Fiumi** Il fiume Adige è lungo 410 km. Il fiume Taro è lungo 2 km in più dei  $\frac{3}{10}$  dell'Adige.  
Calcola la lunghezza del Taro in chilometri.

[125 km]

- 3 **Rimbalzi** Una pallina di gomma rimbalza ogni volta ai  $\frac{3}{4}$  dell'altezza da cui è caduta.  
All'inizio cade da un'altezza di 2,56 m.  
A quale altezza massima arriverà dopo il terzo rimbalzo?

[1,08 m]



- 4 **Mele** Un fruttivendolo acquista 350 kg di mele pagandole 0,40 € al kilogrammo. **ESERCIZIO GUIDA 2**
- Il primo giorno vende  $\frac{3}{7}$  delle mele al prezzo di 1,30 € al kilogrammo.
  - Il secondo giorno vende  $\frac{3}{4}$  delle mele rimaste a 1,15 € al kilogrammo.
  - Il terzo giorno deve eliminare 5 kg di mele guaste e riesce a vendere tutte le mele rimanenti a 0,99 € al kilogrammo.
- Quanto ha guadagnato in tutto dalla vendita delle mele?

[272,05 €]

Ricorda le formule della compravendita.  
Guadagno = Ricavo - Spesa  
Ricavo = Guadagno + Spesa  
Spesa = Ricavo - Guadagno  
Usa quella giusta!



**RAGIONARE IN CONTESTI NUOVI O COMPLESSI**

- 5 **Automobilisti** Due automobilisti partono insieme da Sassari dirigendosi verso Alghero. Dopo 20 minuti la prima automobile ha percorso  $\frac{4}{9}$  della strada, mentre la seconda ne ha percorso  $\frac{1}{3}$ .
- Quale frazione della strada separa le due auto in quel momento?
  - Sapendo che la distanza tra Sassari e Alghero è di 36 km, calcola quale distanza separa le due automobili.

[4 km]

- 6 **Divisione dello stipendio** La signora Luisa spende  $\frac{3}{5}$  del suo stipendio mensile, ne risparmia  $\frac{4}{15}$  e divide il resto in parti uguali fra i suoi tre figli.
- Quale frazione del suo stipendio riceve ciascuno dei figli?
  - Se lo stipendio ammonta a 1980 €, quanti soldi riceve ciascun figlio ogni mese?

[88 €]

- 7 **Bottiglia** Una bottiglia vuota pesa 0,95 kg e riempita d'acqua per  $\frac{5}{8}$  pesa 1,85 kg.
- Qual è la capacità della bottiglia?
  - Quanto pesa la bottiglia piena d'acqua?

[a. 1,44 L; b. 2,39 kg]

- 8 **ECONOMIA Serbatoio** Le figure seguenti rappresentano l'indicatore di livello di un'automobile prima e dopo il rifornimento di benzina.



E (Empty) = vuoto  
F (Full) = pieno

Calcola quanto è costato il rifornimento, sapendo che:

- la capacità del serbatoio è di 48 litri;
- la benzina quel giorno costava 1,60 € il litro.

[44,8 €]